氏名・（本籍）	楯（たて）　辰哉（たつや）
学位の種類	博士（理学）
学位記番号	理博第１６５３号
学位授与年月日	平成11年３月25日
学位授与の要件	学位規則第４条第１項該当
研究科，専攻	東北大学大学院理学研究科（博士課程）数学専攻
学位論文題目	The asymptotic behavior of eigenfunctions and eigenvalues for ergodic and periodic systems （エルゴード性や周期性を持つ力学系に対する固有関数と固有値の漸近挙動）
論文審査委員	（主査）教授　砂田利一 教授　板東重稔，島倉紀夫

論文目次

論 文 内 容 要 旨

コンパクト多様体上の楕円型作用素の,固有値の高エネルギーでの漸近挙動に対する，作用素の主表象によって生成されるハミルトン流の力学的挙動，特にその周期軌道の影響は，Duistermaat-Guillemin, Colin de Verdierè たちによって古くから研究されており，かつ現在においても活発に研究され続けている話題である.例えば，Helton, Guillemin により，測地流が周期的になるための必要十分条件がラプラシアンの固有値の差のある意味での集積点全体の集合の構造に関する条件として得られている。

固有関数の漸近挙動に対する，ハミルトン流のエルゴード的な挙動の影響も，Shnirelman, Zelditch, Colin~de~Verdier¥`e, らによって研究されており，特に砂田によって，高エネルギー準位における量子エルゴード性が定式化され，ハミルトン流がエルゴード的であるための必要十分条件が固有関数の高エネルギー極限下の漸近挙動に関する条件として得られた。

このような量子エルゴード性に関する問題は，負定曲率リーマン面上の測地流とラプラシアンの固有関数を，その問題の典型的なモデルとしている。しかし，そもそも負曲率多様体上の測地流は，リュウヴィル測度に関して単にエルゴード的であるだけでなく，混合性やその他のより強い性質を持つ。古典力学のエルゴード理論においては，そのような力学系を，測度論，スペクトル理論などを用いて調べることが，目標の1つであった。従って，ハミルトン流がエルゴード性よりも強い条件を満たすとき，その力学的挙動が固有関数の高エネルギー極限に関する漸近挙動にどのように影響を与えるか，という問題は，興味深い問題である。

また，例えば magnetic flow のように，群対称性を簡約して得られるハミルトン流は，エネルギー準位について斉次性を持たず，一般にその力学的挙動はエネルギー準位によって異なる。このような力学系のエルゴード性は固有関数の半古典極限に関する漸近挙動に影響を与えることが，Zelditch, Schrader-Taylor らによって調べられている。

そこで本博士論文では，以上の背景を考慮した，以下の3つの問題ついて考察した。

問題 A ハミルトン流が，混合性などのようなエルゴード性よりも強い条件を満たすとき，その力学的挙動が，対応する楕円型作用素の固有関数の漸近挙動に与える影響を調べよ。

問題 B magnetic flow のような群対称性を簡約して得られる力学系において，対応する楕円型作用素に

対して「有限エネルギー準位における」量子エルゴード性，量子弱混合性なる概念を定式化し，それらと古典力学のエルゴード性，弱混合性との関係を調べよ。

問題 C 問題Bと同様の力学系の設定において，固有値の差に対する半古典的な意味での集積点全体の集合と，古典力学の周期性との関係を調べよ。

以下では，本論文の具体的な内容と得られた結果を，各章ごとに簡単に紹介する。なお，定理や定義につけられている番号は論文中のそれに従った。

古典力学のエルゴード理論の内容のうち，以後の章で用いられる概念や事実を，第1章にまとめた。

第2章では，問題Aに関して得られた結果を紹介した。以下でこの章の主定理を述べる。

コンパクトリーマン多様体 M 上で1階非負値楕円型擬微分作用素 $\hat{H}$ で，その主表象 H が，正値なものを考える。余接束 $T^*M\setminus 0$ 上で，H をハミルトニアンとして定まるハミルトン流を θ_t と書く。流れ θ_t はエネルギー一定曲面 $\Sigma=H^{-1}(1)$ 上に制限でき，その上のリュウヴィル測度 ω を保つ。従って，力学系 $(\Sigma,\ \theta_t,\ \omega)$ が得られる。また，$e_1\leq e_2\leq e_3\leq\cdots$ を作用素 $\hat{H}$ の固有値とし，作用素 $\hat{H}$ の固有関数からなる $L^2(M)$ の正規直交基底 $\{\theta_j\}_{j=1}^{\infty}$ を1つとり固定する。$N(\lambda)=\#\ \{j\in N\ ;e_j\leq\lambda\}$ とおく。このとき，主定理は次のように述べられる。

定理 2.5 ハミルトン流 θ_t は transitive な Anosov 流であると仮定する。このとき，M 上の任意の0階の擬微分作用素 A に対して，次が成り立つ。

$$\limsup_{\lambda\to\infty} N(\lambda)^{-1}\sum_{\substack{j\\ e_j\leq\lambda}}\ \sum_{\substack{k\\ 0<|e_j-e_k|<\delta}} |\langle A\theta_j,\ \theta_k\rangle|^2=O(\delta)。$$

定理 2.6 力学系 $(\Sigma,\ \theta_t,\ \omega)$ が一様ルベーグスペクトルを持つと仮定する。このとき，主表象の Σ における空間平均が0であるような，M 上の任意の0階の擬微分作用素 A に対して，実数直線上の L^1-関数 p_A が存在して，任意の開区間 $(a,\ b)$ に対して，次が成り立つ。

$$\lim_{\lambda\to\infty} N(\lambda)^{-1}\sum_{e_j<\lambda}\ \sum_{\substack{k\\ a<e_k-e_j<b}} |\langle A\theta_j,\ \theta_k\rangle|^2=\int_a^b PA(\lambda)d\lambda。$$

一様ルベーグスペクトルや，transitive な Anosov 流の定義は，論文第1章を参照されたい。

第3章では，これ以後の章において考察の対象となる力学系の設定とその諸性質，そして，問題Bに関するいくつかの結果を述べた。以下でこれらを簡単に説明する。

$\pi:P\to M$ をコンパクトなリーマン多様体 $(M,\langle,\rangle_M)$ 上の，構造群がコンパクトな連結リー群 G である主束とする。リー群 G のリー環 $\mathcal{G}$ 上に，随半表現で不変な内積 $\langle,\rangle_\zeta$ を，そして，P 上に接続1形式 Θ を各々固定し，P 上の，G-作用で不変なリーマン計量 $\langle,\rangle_P$ を，次で定義する。

$$\langle u,\nu\rangle_P=\langle d\pi(\nu),\ d\pi(\nu)\rangle_M+\langle\Theta(u),\ \Theta(v)\rangle_\zeta,\ u,\nu\in TP。$$

$\hat{H}$ を P 上の G-作用と可換な1階の非負値楕円型擬微分作用素で，その主表象H が正値であるものとする。P 上の G-作用は，その余接束 T^*P 上のハミルトン的G-作用にリフトされるが，その G-同変なモーメント写像 $\Phi:T^*P\to\mathcal{G}^*$ は，$\langle\Phi(p,\ \zeta),\ A\rangle=\zeta(A_p^*)$，$(p,\ \zeta)\in T^*P,\ A\in\mathcal{G}$ で，与えられる。但しここで，$\mathcal{G}^*$ はリー環 $\mathcal{G}$ の双対空間である。G のある既約表現に対応する最高ウェイト $\lambda\in\mathcal{G}^*$ を固定し，$\mathcal{G}_\lambda$ を λ を通る余随半軌道とする。$\Phi^{-1}(\mathcal{O}_\lambda)$ 上の閉2形式 $\iota_\lambda^*\Omega_P-\Phi^*\omega_\lambda$ $(\Omega_P,\ \omega_\lambda$ は各々 T^*P 上の標準的なシンプレクティック形式と $\mathcal{O}_\lambda$ 上の Kostant-Kirillov シンプレクティック形式) の $\Phi^{-1}(\mathcal{O}\lambda)$ の各点での零化空間は G-軌道の接空間と一致し，商多様体 $X_\lambda=\Phi^{-1}(\mathcal{O}_\lambda)/G$ 上にシンプレクティック形式 Ω_λ を定める。シンプレクティック多様体 $(X_\lambda,\ \Omega_\lambda)$ を簡約された相空間と呼ぶ。

作用素 $\hat{H}$ の主表象 H は $T^*P\setminus 0$ 上の G-不変な滑らかな関数であり，従って，X_λ 上のハミルトニアン H_λ

を定める。$(H_\lambda, \Omega_\lambda)$ によって定まるX_λ上のハミルトン流を ϕ^λ_tで表わす。正の数$e>0$に対して$\Sigma^\lambda_e = H^{-1}_\lambda(e)$とおき，$\Sigma^\lambda_e$上のリュウヴィル測度を$\omega^\lambda_e$と表わす。このとき，我々の考察の対象となる古典力学$CD^\lambda_e = (\Sigma^\lambda_e, \theta^\lambda_t, \omega^\lambda_e)$ が得られる。

コンパクトリー群 G の P への作用はヒルベルト空間 $L^2(P)$ 上のユニタリ表現を誘導する，$L^2(P)$ をこの表現によって次のような直和に分解する:$L^2(P) = \bigoplus_\mu L\mu$ 但しここで，μ は既約表現（の最高ウェイト）全体を動き，$L\mu$ は表現μ と同値な表現たちの和で生成される閉部分空間である。我々は，簡約された量子ハミルトニアン$\hat{H}$を，量子ハミルトニアン $\hat{H}$の閉部分空間 $\mathcal{H}_\lambda = \bigoplus_{M=1}^{\infty} L_{m\lambda}$ （$\subset L^2(P)$)への制限で定義するA_0で P上の G-作用と可換な0階の擬微分作用素全体のなす$*$-環とし，量子物理量のなす環と考える。

$e_1(m) \leq e_2(m) \leq e_3(m) \leq \cdots$を，作用素 H_λの固有値，$\{\nu^m_j\}^\infty_{j,m}$ を作用素 $\hat{H}_\lambda$の固有関数からなる$\mathcal{H}_\lambda$の正規直交基底とする。また，正の数 $c>0$ に対して，

$$N_m(e, c) = \{j \in N; | e_j(m) - me | \leq c\}, \quad N_m(e, c) \# N_m(e, c)$$

とおく。$N_m(e, c)$ は高エネルギー極限の場合の $N(\lambda)$ と同様の役割を果たす。

ここで我々は，簡約された古典力学CD^λ_eに対して，つぎの2つの条件を仮定しなくてはならない。

(H1) $T^*P\backslash 0$ 上のハミルトニアン H のハミルトンベクトル場は $H^1(e) \cap \Phi^{-1}(\mathcal{O}_\lambda) \subset T^* P$ の各点で，その点を通る G-軌道に接しない。

(H2) 簡約されたハミルトン流 θ^λ_t のエネルギー曲面Σ^λ_e 上での周期点全体の集合のリュウヴィル測度が0である。

条件 (H1) は，Σ^λ_e 上の関数を，$T^*P\backslash 0$ 上の0次斉次の G-不変な関数に拡張するのに用いられる。例えば，リーマン計量$\langle , \rangle_P$のノルム関数をハミルトニアンとしたときには，$e > |\lambda|$ を満たす e に対して，条件 (H1) は成り立つ。物理量 $A \in A_0$ に対して，その空間平均$\langle A \rangle^\lambda_e$を次で定義する。

$$\langle A \rangle^\lambda_e = \lim_{m \to \infty} N_m(e, c)^{-1} \sum_{j \in Nm(e, c)} \langle A\nu^m_j, \nu^m_j \rangle$$

仮定 (H2) の下に，Guillemin-Uribe, Zelditch による半古典的 Szegō 極限公式（論文中の定理 3.4）によって，上式の極限の存在が保証され，$\langle A \rangle^\lambda_e = \mathrm{vol}\,(\Sigma^\lambda_e)^{-1} \int_{\Sigma^\lambda_e} \sigma_0(A) d\omega^\lambda_e$ が成り立つ。ここで$\sigma_0(A)$ は，擬微分作用素 A の主表象である。物理量 $A \in A_0$ に対して，その長時間平均$\bar{A}$ を次で定義する。

$$\bar{A} = \text{w-}\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t e^{is\hat{\Pi}} A e^{-is\hat{\Pi}}\, ds.$$

以上の準備の下で，第３章における我々の主定理は以下のように述べることができる。

定理 3.1 簡約された力学系 CD^λ_e は，条件 (H1)，(H2) を満たすとする。このとき，力学系 CD^λ_e がエルゴード的になるためには，以下の2つの条件が満たされることが必要十分である。

(1) 任意の物理量 $A \in A_0$と，任意の固有関数からなる$\mathcal{H}_\lambda$の正規直交基底 $\{\nu^m_j\}^\infty_{j,m=1}$に対して，次が成り立つ。

$$\lim_{\delta \to \infty} N_m(e, c)^{-1} \sum_{\substack{j,k \in N_m(e,c) \\ e_j(m) = e_k(m)}} |\langle A\nu^m_j, \nu^m_k \rangle|^2 = \left| vol(\Sigma^\lambda_e)^{-1} \int_{\Sigma^\lambda_e} \sigma_0(A) d\omega^\lambda_e \right|^2$$

(2) 上と同様の任意の A，$\{\nu^m_j\}$ に対して，次が成り立つ。

$$\lim_{\delta \downarrow \infty} \limsup_{m \downarrow \infty} N_m(e, c)^{-1} \sum_{j \in N_m(e,c)} \sum_{\substack{k \\ 0 < e_j(m) - e_k(m) | < \delta}} |\langle A\nu^m_j, \nu^m_k \rangle|^2 = 0$$

定理 3.3　力学系 CD^{λ}_{c} が条件 (H2) を満たすとき，次の3つの条件は互いに同値である。
(S)　任意の物理量 $A \in A_0$に対して，次が成り立つ。

$$\lim_{\delta \to \infty} N_m(e, c)^{-1} \sum_{j,k \in N_m(e,c)} \| \langle \bar{A} - \langle A \rangle^{\lambda}_{c} \rangle \nu^{m}_{j} \|^2 = 0$$

ここで，$\|\cdot\|$ はL^2-ノルム，$\{\nu^{m}_{j}\}_{j,m}$は固有関数からなる正規直交基底である。
(Z)　任意の物理量 $A \in A_0$ と，任意の固有関数からなる正規直交基底$\{\nu^{m}_{j}\}_{j,m}$に対して，次が成り立つ。

$$\lim_{\delta \to \infty} N_m(e, c)^{-1} \sum_{j,k \in N_m(e,c)} \left| \langle A \nu^{m}_{j}, \nu^{m}_{k} \rangle | - vol(\Sigma^{\lambda}_{c})^{-1} \int_{\Sigma^{\lambda}_{c}} \sigma_0(A) d\omega^{\lambda}_{c} \right| = 0。$$

(C)　上と同様の任意の A，$\{\nu^{m}_{j}\}$ に対して，次を満たす$N_m(e, c)$ の部分集合の族 $\{J_m\}_{m \in N}$ が存在する。

$$\lim_{\delta \to \infty} \frac{\# j_m}{N_m(e, c)} = 1,$$

$$\lim_{\delta \to \infty} \max_{j \in jm} \left| \langle A \nu^{m}_{j}, \nu^{m}_{j} \rangle - vol(\Sigma^{\lambda}_{c})^{-1} \int_{\Sigma^{\lambda}_{c}} \sigma_0(A) d\omega^{\lambda}_{c} \right| = 0。$$

定理 3.5　力学系 CD^{λ}_{c} が，条件 (H1)，(H2) を満たすと仮定する。このとき，力学系CD^{λ}_{c} が弱混合的であるためには，以下の2つの条件が成り立つことが必要十分である。

(1)　任意の物理量 $A \in A_0$と，任意の実数 $\tau \in \mathbf{R}$，そして任意の固有関数からなる正規直交基底 $\{\nu^{m}_{j}\}^{\infty}_{j,m=1}$ に対して，次が成り立つ。

$$\lim_{m \to \infty} Nm\ (e, c)^{-1} \sum_{j \in N_m(e,c)} \sum_{\substack{k \\ e_k(m) - e_j(m) + \tau}} |\langle A \nu^{m}_{j}, \nu^{m}_{k} \rangle|^2 = \left| \mathrm{vol}(\Sigma^{\lambda}_{c})^{-1} \int_{\Sigma^{\lambda}_{c}} \sigma_0(A) d\omega^{\lambda}_{c} \right|^2 = \delta_{\tau,0}。$$

但し，$\delta_{\tau,0}$は，$\tau = 0$のとき，$\tau \neq 0$のとき 0 を表わす。

(2)　上と同様の任意のA, τ, $\{\nu^{m}_{j}\}^{\infty}_{j,m=1}$ に対して，次が成り立つ。

$$\lim_{\delta \downarrow \infty} \limsup_{m \uparrow \infty} N_m(e, c)^{-1} \sum_{j \in N_m(e,c)} \sum_{\substack{k \\ 0 < e_K(m) - e_J(m) - \tau < \delta}} | \langle A \nu^{m}_{j}, \nu^{m}_{k} \rangle |^2 = 0$$

第4章においては問題 C を考察した。この問題は今だ未解決であるが, 第4章と第5章で見るように，以下で定義する固有値の半古典的集積点全体の集合と，簡約されたハミルトン流の周期性には, 密接な関連がある。半古典的集積点の定義を述べるため，記号の準備をする。任意の開区間 I と，正の定数 $c > 0$ に対して，$Nm(e, c, ;I) = \#\{(j, k) \in N_m(e, c) \times N ; e_k(m) - e_j(m) \in I\}$とおく。

定義 4.2　実数 τ が, 集合$\{e_k(m) - e_j(m) ; (j, k) \in N_m(e, c) \times N, m \in Z\}$の，エネルギー準位 eでの半古典的集積点であるとは，ある正の定数 $c > 0$が存在して，τ を含む任意の開区間Iに対して，$\lim_{m \to \infty} N_m(e, c; I) = \infty$ が成り立つことと定義する。エネルギー準位 e での半古典的集積点全体を $s\text{-}D\sigma e$で表わす。

第 4 章における主定理は以下のとおりである。

定理 4.3　力学系 CD^{λ}_{c} は，条件 (H1), (H2) を満たすと仮定する。このとき, エネルギー e での半古典的集積点全体の集合 $s\text{-}D\sigma e$ は実数全体の集合と一致する: $s\text{-}D\sigma e = R$。

第5章では，リーマン面上の主 S^1 束の場合の例を述べた。特に球面とトーラスの場合の例は，簡約された流れ ϕ^{λ}_{t}が周期的であり，また，集合 $s\text{-}D\sigma_c$ は離散的になる例を与えていることに注意しておく。

論文審査の結果の要旨

古典力学と量子力学の間には，高エネルギーレベルでの対応関係と，有限エネルギーレベルにおける半古典近似による対応関係がある。このような対応関係の下で，古典力学における性質が，量子力学にいかに反映するかを問うことは極めて自然な問題意識と言える。その数学的モデルとして，コンパクトなリーマン多様体上の測地流（古典力学）とラプラシアンの固有値，固有関数（量子力学）の間の関係が，多くの数学者によって研究されてきた。一般の場合でも，高エネルギーレベルにおける研究はこれまで活発に行われ，既に多くのことが知られているが，有限エネルギーレベルでは，擬微分作用素としての量子ハミルトニアンの低階項を考慮する必要があり，ようやく最近になって本格的に研究が行われるようになったものである。本論文では，まず一般の状況の下で，エルゴード性を持つ古典力学系に対応する量子的ハミルトニアンを考察し，固有関数からなる正規直交基底の詳細な漸近的性質を半古典近似の方法により研究した。そして，有限エネルギーレベルでの量子エルゴード性の定式化を行い，弱い条件の下で，古典エルゴード性と量子エルゴード性の同値性を確立した。さらに，エルゴード的力学系として代表的なアノソフ系，さらに強い不安定性を有する一様ルベーグスペクトラムを持つ力学系に対して，０階擬微分作用素のこの基底に関する行列表示について，そのオフ・ダイアゴナルな部分の挙動を明らかにし，これまで内外で行われた研究を部分的に含む結果を得ている。本論文における手法はいわゆる幾何解析であり，幾何学及び解析学を含む数学の複数分野に跨っている。特に，主定理の証明では，擬微分作用素，フーリェ積分作用素などの理論を駆使しており，その知識量と力量が伺える。代表的な量子ハミルトニアンとして，磁場の下での古典力学と磁場付きのシュレディンガー作用素の場合を例として含んでおり，幾何学の立場からも重要な意義を持つものである。さらに本論文では，エルゴード的な力学とは対照的な周期的力学系の研究にも，大きな貢献を成した。本論文の成果は，これからの研究の方向を示唆する注目すべき内容といえる。

したがって，楯辰哉提出の論文は，博士（理学）の学位論文として合格と認める。