氏名・(本籍)	山崎　武（やまざき　たけし）
学位の種類	博士(理学)
学位記番号	理博第1733号
学位授与年月日	平成12年3月23日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
研究科，専攻	東北大学大学院理学研究科（博士課程）数学専攻
学位論文題目	Model-theoretic studies on subsystems of second order arithmetic (二階算術の部分体系のモデル論的研究)
論文審査委員	(主査) 教授 田中一之 教授 森田康夫 助教授 赤間陽二

論文目次

論 文 内 容 要 旨

数学基礎論の主要な研究課題の一つは，数学を展開するのに適当な公理系は何かを調べることである。Hilbert-Bernays［1］は，数学のかなりの部分が，自然数と自然数の諸集合を対象にした二階算術の形式体系Z_2の中で展開できることを示した。さらに，Weylをはじめとする多くの研究者によってZ_2の部分体系でも十分に数学が展開できることが明らかになった。そして1970年代半ば，H. Friedmanは「多くの場合，一般の数学の定理τは，ある特定の集合存在公理の一つ$S(\tau)$と，体系RCA_0で同値であること」に気付いた。例えば，Bolzano-Weierstrassの定理は，RCA_0のもとで，算術的論理式で定義できる集合の存在公理と同値になる。これを，逆数学現象といい，このような結果を調べることを「逆数学」プログラム［2］と呼んでいる。

本論文の目的は，二階算術の部分体系のモデルの性質を分析し，このプログラムに関連した結果を与えることである。我々は二階算術の主要な部分体系のうち，特にRCA_0, WKL_0, ACA_0に注目する。RCA_0は，再帰的集合に関する存在公理と制限された数学的帰納法からなる体系で，計算可能数学(computable mathematics)の立場を形式化したものと考えられる。RCA_0では可算代数構造や実数上の連続函数に関する初等的事実を証明することができる。WKL_0は，RCA_0にweak König's lemmaを公理として付け加えたものである。weak König's lemmaは「無限個の頂点をもつ2分木は無限道をもつ」という主張で，Cantor空間のコンパクト性をあらわす。ACA_0はRCA_0に算術的論理式で定義できる集合の存在公理を付け加えたものである。ACA_0では，先に述べたように，Bolzano-Weierstrassの定理が証明できる等，極限などの概念が比較的スムーズに展開できる。

1章では，これらの体系の正確な定義を与える。また，選択公理ACや従属選択DCを有限化して得られる新しい公理BAC（有界選択公理）やBDC（有界従属選択）と通常の帰納法との間の論理的な包含関係について考察する。

2章では，WKL_0と$RCA_0+\Pi^0_\infty$-BCTに関する新しい保存的性質を述べる。Baireのカテゴリー定理はRCA_0で証明できるものとそうでないものの2種類の表現がある。Π^0_∞-BCTは，後者を拡張したもので，可分Banach空間における開写像定理や逆写像定理を証明するときに用いられる。

さて，形式体系TとTよりも強い体系T'について，Tの論理式σに関して

「T'でσが証明できれば，Tでσが証明できる」

という関係があるとき，T'はσに対してTの保存的拡大であるという。2.1節の主結果は次のものである。

定理 2.2　$\phi(X,Y)$をX, Yだけを自由変数にもつ算術的論理式とする。このとき，$RCA_0+\Pi^0_\infty$-BCTは$\forall X \exists ! Y \phi(X,Y)$という形の論理式に対して$RCA_0$の保存的拡大である。

ここで，$\exists ! X$は，「ただ一つのXが存在して」という意味である。定理2.2は，Brown-Simpsonの結果を拡張したもので，ある種の一意性をともなう存在定理に関して，それを証明するのに開写像定理や逆写像定理などといったBaireのカテゴリー定理による結果は本質的に使わなくてよいということを主張する。

また，2.2節では次の結果を証明する。

定理 2.31　$\phi(X,Y)$をX, Yだけを自由変数にもつ算術的論理式とする。このとき，WKL_0は$\forall X \exists ! Y \phi(X,Y)$という形の論理式に対して$RCA_0$の保存的拡大である。

定理2.31はHarringtonの結果を拡張したもので，Tanaka［3］の予想を肯定的に解いたものである。WKL_0では数学の多くの部分が展開できることが知られている。よって，定理2.31により，一意性をともなう存在定理の多くは，計算可能数学でも展開できることがわかる。

3章では，「逆数学」プログラムに沿って，Haar測度の存在と直観主義述語論理の完全性定理を証明するのに必要十分な体系が，それぞれ，WKL_0とACA_0であることを証明する。また，RCA_0よりも弱い体系で実解析の基礎理論がどこまで展開できるかを考察する。

3.1節では，主結果としてHaar測度の存在に関する次の定理を証明する。

定理3.11　次の主張はRCA_0のもとで互いに同値である。

(1) WKL_0

(2) 任意の（可分）コンパクト群はHaar測度をもつ。

ここでは，自然数の部分集合AとA上の擬距離$d{:}A\times A\to\mathbb{R}$との組で完備可分距離空間$\hat{A}$を定義する。そして，$\hat{A}$の元を$\forall n\in\mathbb{N}[d(a_n,a_{n+1})\leq 2^{-n-1}]$を満たす$A$の元の列$\langle a_n : n\in\mathbb{N}\rangle$で定義する。また，$A$の有限部分集合$A_i$の列$\langle A_i\in A^{<N} : i\in\mathbb{N}\rangle$が存在して，各$A_i$が$\hat{A}$の$2^{-i}$-被覆となるとき，$\hat{A}$はコンパクトであるという。同様にして，可分Banach空間も定義することができ，これにより，コンパクト完備可分距離空間$\hat{A}$の連続関数の空間$C(\hat{A})$を定義する。また，コンパクト群G上のHaar測度は，$C(G)$上の有界線形作用素として定義されている。定理3.11において，特に(1)から(2)を導くのに，WKL_0の自己埋め込み定理から導かれる超準解析の手法にを使って，モデル論的な証明を与える。また，WKL_0よりも弱い体系でHaar測度の存在が証明できるコンパクト群についても述べる。

3.2節では直観主義論理の完全性に関して考察する。直観主義論理は，その意味論として色々なものが考えられている。Kripkeモデルとよばれるものもその一つである。ここでは，strong completeness theoremと呼ばれる次の主張について考える：「Γが直観主義的に無矛盾ならば，あるKripkeモデルκで，任意の文σについて，Γでσが証明できることとκでσが真であることが同値になるものが存在する。」我々は主結果として次のものを証明する。

定理3.25　次の主張はRCA_0のもとで互いに同値である。

(1) ACA_0

(2) 直観主義述語論理のstrong completeness theorem

これまでの多くの「逆数学」プログラムに関する研究と同様に，定理3.11と定理3.25はRCA_0のもとで，数学の定理と体系の同値性を調べた。しかし，RCA_0よりも弱い体系のもとでこのような同値性を調べることが，今後の発展の一方向として考えられる。この方面に関しては現在あまり多くの結果が知られていない。BTFAはRCA_0の数学的帰納法の使用を更に制限した体系と考えられるものである。この帰納法の制限によって，BTFAは多項式時間計算可能関数を特徴付けることができる。3.3節は，BTFAで実解析の基礎理論がどこまで展開できるかを研究し，以下の結果を得た。

定理3.30　BTFAで実数上の連続函数に対する中間値の定理が証明できる。

定理3.34　次の主張はBTFAのもとで互いに同値である。

(1) $\sum_1^b$-CA

(2) [0,1]区間上の実数値連続函数Fが多項式となるmodulus functionをもつならば，$G(x) = \sup_{0\leq y\leq x} F(y)$は[0,1]区間上の連続函数である。

ここで，Fのmodulus functionとは，$\forall n\in\mathbb{N}\forall x,y\in[0,1](|x-y|<2^{-h(n)}\to|F(x)-F(y)|<2^{-n})$をみたす函数$h{:}\mathbb{N}\to\mathbb{N}$のことである。また，$\sum_1^b$-CAは大変弱い集合存在公理であるが，BTFAでは証明できないと思われるものである。

参考文献

[1] P. Bernays and D. Hilbert, *Grundlagen der Mathematik*, volume I and volume II, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, second edition, 1968 − 1970.

[2] S. G. Simpson, *Subsystems of Second Order Arithmetic,* Springer-Verlag, 1998.
[3] K. Tanaka, *More on models of* WKL_0, hand-written notes, 1995.

論文審査の結果の要旨

山崎武は，本博士論文において，数学基礎論の古典的な研究対象である二階算術の体系に対し，現代的なモデル論的手法を用いることによって，いくつかの重要な新事実を示した。それらの結果は，大きく２つに分けることができる。すなわち，複数の形式体系間の論理的関係を調べるものと，特定の数学の定理がどの部分体系で証明できるかを調べるもので，それぞれ本論文の２章と３章を構成している。

まず，２章では，再帰的内包公理をもつ二階算術の体系 RCA_0 を基礎として，それにベールのカテゴリー定理を公理に加えた体系 RCA_0^+ と，無限２分木に関する弱ケーニヒの補題を加えた体系 WKL_0 を考察する。この２つの拡張体系はどちらも，算術命題に関する限り RCA_0 と証明能力が変わらないことはすでに知られていた。　本博士論文では，$\phi(X,Y)$ を算術式として $\forall X \exists! Y\ \phi(X,Y)$ の形の命題にまで，この保存的性質が拡張できることを証明している。つまり，$\forall X \exists! Y\ \phi(X,Y)$ の形の命題は，ベールのカテゴリー定理や弱ケーニヒの補題を使って証明できれば，使わなくても証明できるという結果を得た。　とくに，弱ケーニヒの補題に関する保存性は，この分野の研究者の間に知られた未解決問題であった。

３章では，ハール測度の存在と直観主義述語論理の完全性定理を証明するのに必要十分な体系が何かを決定した。とくに，前者においては，超準解析の手法が斬新に用いられた。この２つの結果はいわゆる「逆数学」プログラムに沿った研究であるが，３章の最後では，多項式時間計算可能関数を特徴付ける体系 BTFA において，どこまで実解析が展開できるかを調べており，これはこの分野の新しい発展可能性を示すものである。

これらの結果は，山崎武が自立して研究活動を行うに必要な高度の研究能力と学識を有することを示している。したがって，山崎武提出の論文は博士（理学）の学位論文として合格と認める。