氏名・(本籍)	瀬戸道生（せとみちお）
学位の種類	博　士(理　学)
学位記番号	理博第１９８６号
学位授与年月日	平成15年３月24日
学位授与の要件	学位規則第４条第１項該当
研究科，専攻	東北大学大学院理学研究科（博士課程）数学専攻
学位論文題目	OPERATOR THEORY IN HARDY SUBMODULES （ハーディ部分加群上の作用素論）
論文審査委員	（主査）教授　吉野　崇 教授　堤　誉志雄 助教授　斎藤和之

論 文 目 次

論 文 内 容 要 旨

N次元複素空間内の多重円板 $\mathbb{D}^N$ 上のハーディ空間 $H^2(\mathbb{D}^N)$ を考える．多項式を掛ける作用で不変なハーディ空間の閉部分空間はハーディ部分加群，または $H^2(\mathbb{D}^N)$ の不変部分空間とよばれる。1949年，Beurling により一変数のハーディ部分加群は inner function と呼ばれる関数族により分類されることが明らかにされた。この定理は作用素論と関数論とを結ぶ重要な定理の一つとして知られている。本学位論文の目的はこの Beurling の定理の多変数版を考えることである。

この論文で主要な役割を演じるのは，座標関数 z_i を掛ける作用をその作用で不変な閉部分空間に制限

した作用素 V_i である。この作用素たちが可換条件 $[V_i^*, V_j]=0$ $(i \neq j)$ をみたすときは，設定をハーディ空間に限る必要はなく多重円板の境界 $\mathbb{T}^N$ 上の二乗可積分関数全体のなす空間 $L^2(\mathbb{T}^N)$ で考えてよい。この設定の下，二変数の場合は Mandrekar と中路により Beurling 型の定理が得られている。本論文前半の第一の結果はこの中路の定理を一般の N 次元にまで拡張したことである。また実数版 Beurling の定理として Lax の定理が知られているが，第二の主要な結果として多変数における Lax 型定理を得た。この結果は第一の結果の系として得られる。

論文の後半ではハーディ部分加群の分類がその主題である。作用素の可換条件 $[V_i^*, V_j]=0$ $(i \neq j)$ はとても強い条件であり，それをみたすものは非常に限られている。そこでハーディ部分加群の間に何らかの同値関係を入れ分類を試みたい。加群としての同型の研究は多くの人々によって研究されているが，ここでは V_i たちにより生成される C^*-環を考えた。この C^*- 環を用いたハーディ部分加群の分類を試みる。そのためには次の1978年に Berger-Coburn-Lebow によって提出された問題が出発点となる：

問題：余次元有限なハーディ部分加群から定まる C^*- 環は全てユニタリ同型か？

本論文の第三の結果はこの問題に肯定的な完全解答を与えたことである。すなわち，

解答：余次元有限なハーディ部分加群から定まる C^*- 環は全てユニタリ同型である。

この結果についていくつか注意したい。一変数の場合は Beurling の定理により全てのハーディ部分加群は加群として，またその上の C^*- 環もユニタリ同型であることがわかる。また多変数の $H^2(\mathbb{D}^N)$ において，ハーディ部分加群の余次元が有限なとき，加群としてユニタリ同型になるものはそれ自身に限られることが知られている. つまり $H^2(\mathbb{D}^N)$ において，余次元有限な異なるハーディ部分加群同士は加群としては同型でないが，その上の環同士は同型であることがわかった。これは多変数における Beurling 型の定理の一つであると解釈できる。

今後の課題としては，非同型な環が存在するか？という問題が残されている。

論文の最後ではハーディ部分加群に関する三つの話題を扱った。最初に多変数における Lax 型の定理に別証明を与えた。次にHelson の理論の多変数への拡張を試みた。先に述べた作用素の可換性と類似の条件下では理論を展開させることができたが本質的な解決になってはいない。この話題は未発達で今後の課題として残されている。そして最後に backward shift で不変な $H^2(\mathbb{D}^2)$ の閉部分空間の研究についてまとめた。ハーディ部分加群の研究にはその双対的な対象である backward shift 不変な空間の研究を欠かすことができない。Berger-Coburn-Lebow の問題を解く際に重要な役割を果たしたアイデアと補題がここで紹介される。

最後に，ハーディ部分加群を研究する理由を作用素論からの視点で簡単に述べたい。ヒルベルト空間とその上のある一つの作用素とが与えられたとき，それらを具体的な空間に表現してその構造を調べたい. これを作用素のモデル理論と呼ぶ。これは一種の表現論である。Sz. Nagy-Foias と de Branges-Rovnyak による二つのモデル理論はともに単位円板上のベクトル値ハーディ空間の中で，多項式を掛ける作用で不変な空間のある種の補空間への表現である。ここで注意すべきは，二つのモデル理論の出発点はともに Beurling の定理にあること，そして次に，ベクトル値ハーディ空間を $H^2(\mathbb{D}^2)$ にもう一度表現することによりモデル理論における概念の解析的な対応物が判明することである。以上の二つの理由によりハーディ部分加群の研究は 多変数作用素論（multi-variate operator theory）へと進む際にそのよい道標になると考えられる。

論文審査の結果の要旨

瀬戸道生提出の論文は，多次元トーラス上のL^2-空間の不変部分空間の構造を，或条件の下で決定し，その系として，ラックスの定理及びヘルソンの理論の多変数版を得，また，ハーディ加群に関連したC^*-環についてバーガー・コバーン・レボウが提示した問題に完全な解答を与えたものである。

多次元トーラス上のL^2-空間の不変部分空間とは，各成分方向の単純片側推移作用素すべてで不変な部分空間を意味する。各成分z_i方向の単純片側推移作用素Tz_iをその不変部分空間へ制限したものをV_iとすると，V_iは等距離作用素である。古典的な，ビューリンの結果の拡張として，1994年，中路氏は，２次元トーラス上のL^2-空間の不変部分空間の構造を，$V_1V_2^*=V_2^*V_1$なる条件の下で決定した。

本論文では，初めに，第３節で，モデル理論を導入し，モデル理論とハーディ・サブモデュールとの間の関連を調べ，又，等距離作用素V_iをWold分解したときのユニタリ部分への射影がV_iで生成されたノイマン環の中心に入ることを利用して，３次元トーラス上のL^2-空間の不変部分空間の構造を，$V_iV_j^*=V_j^*V_i$, $(i\neq j)$なる条件の下で決定している。作用素論の手法を用いたこの方法は，中路氏の結果を拡張したばかりではなく，更に，$\mathbb{R}^3$上のL^2-空間の不変部分空間についても同じような議論が出来ることを示唆しており，その結果，1次元$\mathbb{R}$のときはラックスの定理の名で知られている結果の３変数版も得ている。作用素論を用いたこの手法に新しい知見が認められる。

次に，付録Cで，後方推移作用素の不変部分空間について調べ，第４節では，ハーディー・サブモデュールに結びついた２つのC^*-環の性質について解析し，又，余次元が有限な特別なハーディー・サブモデュールについて調べ，これらの準備の下で，第３節で用いた条件$V_iV_j^*=V_j^*V_i$, $(i\neq j)$は作用素の交換子$[V_iV_j^*]$, $(i\neq j)$が零になる場合であるが，2001年に，ヤングがこの交換子$[V_iV_j^*]$, $(i\neq j)$は零にはならなくてもほとんどの場合，ヒルベルト・シュミット-クラスの作用素つまりコンパクト作用素になることを示したのを利用して，MをT_zとT_wで不変な$H^2(\mathbb{D}^2)$の部分空間とすると，Mの余次元が有限ならば，V_zとV_wで生成されるC^*-環$\mathcal{A}(V_z, V_w; M)$は全て$\mathcal{A}(T_z, T_w; H^2(\mathbb{D}^2))$とユニタリ同型になることを示した。これは，バーガー・コバーン・レボウが1978年の論文で提示していた問題の完全な解答を与えたものである。

これらの結果は，瀬戸道生が自立して研究活動を行うに必要な高度の研究能力と学識を有することを示している。従って，瀬戸道生提出の論文は，博士（理学）の学位論文として合格と認める。