氏名・(本籍)	石渡　聡（いしわた　さとし）
学位の種類	博　士（理　学）
学位記番号	理博第２０６４号
学位授与年月日	平成16年1月21日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
研究科，専攻	東北大学大学院理学研究科（博士課程）数学専攻
学位論文題目	Geometric and analytic properties in the behavior of random walks on nilpotent covering graphs （ベキ零被覆グラフ上のランダム・ウォークの挙動に表れるグラフの幾何的・解析的性質）
論文審査委員	（主査）教授　西川青季 教授　板東重稔，小西元子

論 文 目 次

論 文 内 容 要 旨

本学位論文はベキ零被覆グラフ上のランダム・ウォークの挙動に表れるグラフの幾何的および解析的性

質について, これまでに得られた結果をまとめたものである。

向き付けられた連結かつ局所有限なグラフがベキ零被覆グラフであるとは, 有限グラフの被覆グラフで、その被覆変換群が有限生成ベキ零群のときをいう。

ベキ零被覆グラフの特徴として, 多項式増大度を持つことと, 周期性を持つことが挙げられる。多項式増大度を持つグラフの推移確率の挙動は詳しく研究され, 特に推移確率のGauss型の評価はグラフの解析的な性質と密接に関係していることが明らかになっている (Hebisch and Saloff-Coste, Coulhon and Grigor'yan, Varopoulos, Woess)。

一方, 可換な周期を持つグラフに関しては "等質化の方法" によりランダム・ウォークの時刻無限大での挙動が研究されていた (小谷・砂田, 2000)。本来, 等質化とはユークリッド空間上の周期的な係数をもつ微分作用素に関する熱核の時刻無限大の挙動を, 時刻の増大と空間のスケーリングの関係を用いて, 等質化作用素と呼ばれる定数係数の微分作用素の熱核で近似するという方法である。グラフ上ではスケーリングを定義することができないため, グラフの作用を保ちながら, スケーリングが定義されている空間にグラフを実現することによって等質化を行う。このとき、グラフを実現する空間をどのように選ぶかが重要である。

第2章では, ベキ零被覆グラフの中心極限定理を証明した。ここでいう中心極限定理とは, ベキ零被覆グラフをその被覆変換群を格子として含むベキ零リー群に実現することによって, 推移確率を核に持つ作用素として定義される推移作用素の生成する離散的な半群は, 時間を無限大に近付けると同時にグラフのスケーリングを0にしていくとき, ベキ零リー群上の半群に収束する, という定理のことである。ベキ零被覆グラフの場合, 極限としてリー群の積をdilationを用いて変形したlimit group上のAlbanese計量に関する劣ラプラシアンの熱作用素が現れるという幾何学的な特徴付けを得た。また, Pansuの定理より, limit groupはグラフのGromov-Hausdorff極限とも一致する。この結果はより一般のグラフで同様の収束を考える際に, 連続モデルとして何をとればよいのかという問題に対して, そのグラフのGromov-Hausdorff極限が1つの候補になる, ということを示唆している。しかし多項式増大度を持たないグラフで, Gromov-Hausdorff極限がHausdorff空間にすらならない例が知られており, 指数増大度を持つ群が作用しているグラフなど, 一般の場合は未解決である。

第3章では, 主定理としてBerry-Esseen型定理を証明した。中心極限定理により, 推移確率はベキ零リー群上のAlbanese計量に関する劣ラプラシアンの熱核に時刻無限大で収束するが, Berry-Esseen型定理とはこの収束のスピードの評価のことである。ベキ零被覆グラフの場合, 時刻nに関する収束のスピードはCn^{-(D+1/2-ε)/2} でおさえられるという結果を得た (Cは0<ε<1/2に依存する定数, Dはグラフの増大度). 推移確率, 熱核はそれぞれGauss型の評価を持つため, 個別の評価n^{-D/2} よりも収束のスピードが速いところがこの定理の本質的な部分である。 この評価はAlexopoulosにより得られた有限生成ベキ零群に関するCayleyグラフの場合の評価Cn^{-(D+1)/2} よりは遅い評価であり, ベストな評価かどうかはまだ未解決である。しかしこの収束のスピードがCayleyグラフと同じであるための十分条件を得た。与えられたベキ零被覆グラフがこの条件を満たすかどうかを調べることは容易だが, この条件の幾何学的な意味及び必要性についてはわかっていない。

第4章では, Berry-Esseen型定理の証明のために推移確率および推移確率の勾配に対するGauss型評価を証明した。また, 推移確率の勾配のGauss型評価とchain-argumentを用いることで推移確率の下からのGauss

型評価を得た。Coulhon and Grigor' yan, Delmotteらの結果を用いることにより, relative Faber-Krahn不等式, parabolic Harnack不等式, Poincare不等式が成り立つこともわかる。また, 推移確率の勾配のGauss型評価と, 次に述べるRiesz変換のL^p有界性に密接な関係があることが知られている (Auscher, Coulhon, Duong, Hofmann)。

第5章では, これらの結果の応用としてベキ零被覆グラフ上のRiesz変換は$1<p<\infty$でL^p有界であることを証明した。Riesz変換は調和解析等において頻繁に用いられる作用素である。1983年にStrichartzは,「Riesz変換のL^p有界性によって非コンパクトリーマン多様体を分類せよ」という問題を提唱し, これ以降, さまざまな条件の下でRiesz変換のL^p有界性が調べられてきた。特にCoulhon, Duongらの研究から, 熱核のGauss型評価との関係が指摘され, 彼らによって1999年に,「多項式増大度を持つ群が余コンパクトに作用している多様体の場合に熱核の勾配のGauss型評価やRiesz変換のL^p有界性は成り立つか」という問題が提起された。グラフ上のRiesz変換に関しては, これまでグラフがvolume doubling conditionを満たし, 推移確率がGaussian upper estimateを満たすとき, Riesz変換は$1<p<2$でL^p有界であることは知られていた (Russ, 2000)。本論文で得られた結果により, Coulhon, Duongの問題に離散的な場合の解答が得られたことになる。

論文審査結果要旨

粒子のランダムな運動をモデルとする離散マルコフ過程を，ランダム・ウォーク（乱歩）という。グラフなどの離散的な図形上のランダム・ウォークの研究は，数学の研究だけでなく，電気回路やネットワークなどへの応用上の観点からも重要である。

本論文の研究目的は，グラフ上のランダム・ウォークの時間無限大での挙動に，グラフの幾何学的な性質がどのように反映されるかを明らかにすることである。とくに，グラフの増大度が多項式のオーダーで，かつ周期性をもつ場合，いいかえると局所有限な無限グラフで巾零群が自由に作用し，商グラフが有限グラフとなるような「巾零被覆グラフ」上のランダム・ウォークを研究対象とし，ランダム・ウォークに対する基本的な極限定理である「中心極限定理」とその精密化を証明している。

古典的な中心極限定理は，整数格子上のランダム・ウォークが時間無限大でユークリッド空間のブラウン運動に収束することを主張するが，本論文において著者は，巾零被覆グラフ上のランダム・ウォークに対しては，ランダム・ウォークの定める半群が巾零リー群上の劣ラプラス作用素が定める熱半群に収束することを証明した。

さらに，この極限にあらわれる巾零リー群が，巾零被覆グラフ上の距離を縮小させた場合のグロモフ・ハウスドルフ極限としてえられる距離空間に他ならないことを見いだすとともに，この極限としてえられる距離（カルノー・カラテオドリー距離）から定まる劣ラプラス作用素が「等質化作用素」であることを示し，中心極限定理を幾何学的な観点から定式化することに成功した。

グラフの基本的モデルである整数格子が自由アーベル群（可換群）による周期性をもつのに対し，巾零被覆グラフでは非可換な群による周期性を取り扱うため，その研究には多くの困難が伴う。本論文の最も独創的かつ重要な寄与は，整数格子上のランダム・ウォークの時間無限大での挙動の解析に有効な手段である「等質化」の方法を，非可換な周期性をもつ巾零被覆グラフに対して拡張した点にある。

以上の結果は，いずれも著者が自立して研究活動を行うに十分な高い研究能力と学識を有することを示している。したがって，石渡聡提出の論文は，博士（理学）の学位論文として合格と認める。