

氏名・(本籍)	すず き かなこ 鈴 木 香 奈 子
学位の種類	博 士 (理 学)
学位記番号	理博第2219号
学位授与年月日	平成18年3月24日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
研究科, 専攻	東北大学大学院理学研究科(博士課程) 数学専攻
学位論文題目	Existence and Behavior of Solutions to a Reaction-Diffusion System Modeling Morphogenesis (形態形成をモデル化したある反応拡散系の解の存在とその挙動)
論文審査委員	(主査) 教授 高 木 泉 教授 柳 田 英 二 助教授 千 原 浩 之

論 文 目 次

- Chapter 1 Introduction
- Chapter 2 Study of the Initial-Boundary Value Problem
- Chapter 3 The Dynamics of the Kinetic System
- Chapter 4 Steady-State Patterns in Two Dimensional Thin Domains

論 文 内 容 要 旨

本論文は、1972年に A. Gierer と H. Meinhardt によって提唱された活性因子-抑制因子型の反応拡散方程式系について、その解の存在と挙動に関する研究の結果である。

数理生物学において、細胞や組織のパターン形成のメカニズムの解明は最も関心を集めてきた問題の一つである。20世紀半ばに、チューリングが「異なる拡散率をもつ二種類の粒子が相互作用をしつつ拡散するとき、空間的非一様性が出現し得る」という反応誘導不安定化現象を発見して以来、自然界に見られるパターンの自律的形成のメカニズムの中には、この原理で説明できるものが多いことがわかってきた。今日、パターン形成の有力なモデルとして反応拡散系の果たす役割は大きい。ギーラー・メインハルト系はその一つであり、形態形成のモデルとして様々な現象を説明するために広く用いられている。しかしギーラー・メインハルト系は、未知関数が分母にあるという非線形性による技術的な困難のため、そのダイナミクスがこれまで詳しく研究されていなかった。したがって、このギーラー・メインハルト系のもつ非線形性の本質をとらえて、解の大域的挙動の詳細を知ることがパターン形成の仕組みの理解につながるものと期待される。

ギーラー・メインハルト系は、二つの未知関数(活性因子 u と抑制因子 v)に関する連立半線形放物型偏微分方程式であり、 u と v はユークリッド空間内の有界領域を占めるものである。抑制因子が活性因子

よりも速く拡散することにより、遠方での活性因子の生産が抑えられ、活性因子の濃度差が生じることにより、空間的に非一様なパターンが現れると期待される。拡散速度の関係と共にパターン形成に影響を及ぼすのが、非線型性をもつ反応項である。活性因子と抑制因子それぞれが持つ非線型項について、 u が満たす方程式は、分子が u の p 乗、分母が v の q 乗という形をしており、 v が満たす方程式は、分子が u の r 乗、分母が v の s 乗という形をしている。ここで指数 p, q, r, s は $p > 1, q > 0, r > 0, s \geq 0$ かつ $0 < (p-1)r < q/(s+1)$ を満たす実数である。これらの指数の大小関係が、ギーラー・メインハルト系の解の挙動を考察する際に、重要な役割を果たすことがわかった。以下、各章の内容の概略を述べる。

第二章では、ギーラー・メインハルト系にノイマン境界条件を課し、適当な初期値の下で初期値－境界値問題を考察する。

指数が $p-1 < r$ を満たし、活性因子の満たす方程式が非自明な基礎生産項を持つ場合には、解の時間大域的な存在や、吸引領域の存在が知られている(K. Masuda and K. Takahashi (1987), M. Li, S. Chen and Y. Qin (1995))。ここで基礎生産項とは空間変数の関数であり、単位時間あたりに細胞から生産される活性因子の量を表す。また吸引領域とは、 uv -平面の第一象限の初期値に無関係な有界領域で、十分時間が経過した後初期値－境界値問題の解が必ずそこに含まれてしまうものをいう。この章では活性因子が基礎生産項を持たない場合も考察した。ここで得られた結果と今までに知られている結果を合わせることにより、 $p-1 < r$ の場合の解の存在と有界性についての完全な理解が可能になる。活性因子が基礎生産項を持つ場合と持たない場合のどちらも時間大域解が存在する。しかし、非自明な基礎生産項を持つ場合は吸引領域が存在し、つまり解は有界になるが、基礎生産項を持たない場合は、抑制因子の反応時定数を適当に選ぶと非有界な解が存在する。指数の条件 $p-1 < r$ は、活性因子が自分自身を活性化させる強さを表す指数 p と抑制因子の増加を促す強さを表す指数 r を比較している。今とは逆に $p-1 > r$ の場合は、実は有限時間で爆発する解の存在がわかる。これは次の第三章の結果に含まれる。したがって、 $p-1 < r$ のときは時間大域解が存在することから、抑制因子が活性因子の際限ない増加を阻害する強さが充分にあり、系が安定するように働くと考えられる。一方 $p-1 > r$ の場合は抑制因子が活性因子の増加を充分に阻害することができず、有限時間で爆発する解が存在すると理解することができる。

第三章では、ギーラー・メインハルト系を最も単純化した場合、つまり拡散項を除き、活性因子の基礎生産項がない場合の常微分方程式系を考察する。

ギーラー・メインハルト系の解の時間について大域的な挙動に関する体系的な研究の一つとして、吸引領域の存在が上げられる。しかしこの結果でも、解がどのような振る舞いをしながら吸引領域に吸い込まれていくか、など解の形については述べられていない。したがって、より精密な「解の振る舞い」を明らかにすることを目指し、その第一歩として最も単純な場合、つまり常微分方程式系の解の挙動を詳しく解析した。初期値は常に uv -平面の第一象限にとる。解軌道は、指数 p, q, r, s と抑制因子の反応時定数と初期値を与えるとただ一つ定まる。すべての解軌道についてその正の極限集合と負の極限集合を明らかにすることができた。具体的には次のように要約される。まず、指数間の関係により次の三つに場合分けをする。Case I: $r > p-1$ かつ $s+1 > q$, Case II: $r \geq p-1$ かつ $s+1 \leq q$, Case III: $r < p-1$ かつ $s+1 < q$ 。なぜなら、これら三つの場合で正の極限集合および負の極限集合となり得る集合が異なるためである。次に、それぞれの場合について、抑制因子の反応時定数の大きさにより正の極限集合と負の極限集合の組み合わせが決まる。以下、正の極限集合および負の極限集合を併せて単に極限集合と呼ぶこととし、それぞれの特徴を述べると次のようになる。

・ Case I では、反応時定数が $(s+1)/(p-1)$ に等しいとき、周期軌道と非周期軌道が並存し、等しくない場合は周期軌道は存在しない。周期軌道以外の極限集合はただ一点からなり、平衡点、無限遠点、 u 軸の非負の部分にある点のいずれかである。特に、時間変数 t について負の方向に解くと有限時間で u 軸に到達する解が、反応時定数の大きさによらず存在する。

・ Case II では、反応時定数が $(s+1)/(p-1)$ に等しいとき、すべて周期軌道となる。一方、等しくない場合は周期軌道は存在せず、極限集合は平衡点、原点、無限遠点のいずれか一点であるか、または u 軸と v 軸それぞれの非負の部分の併せた連続体である。なお、すべての解はすべての時間で存在する。

・ Case III でも、反応時定数が $(s+1)/(p-1)$ に等しいとき周期軌道と非周期軌道が並存し、等しくない場合は周期軌道は存在しない。周期軌道以外の極限集合はただ一点からなり、平衡点、原点、あるいは u が無限大であり、 v は任意の正数である点 $(u,v)=(+\infty, v)$ のいずれかである。特に、 t について正の方向に解くと有限時間で爆発する解が反応時定数の大きさによらず存在する。

最後に第四章では空間次元を二次元とし、ギーラー・マインハルト系において、抑制因子の拡散係数を無限大とした極限方程式系(shadow system)の定常解の存在とその形状について考察する。この際、非線型項の指数は $(p, q, r, s) = (2, 1, 2, 0)$ にとる。これはよく用いられる例であり、実際、数値シミュレーションでよく見られる解の挙動はこの例の場合が多い。Shadow system の定常解を考える場合、抑制因子はある定数に収束するため、考えるべき問題は、活性因子に関する単独の楕円型方程式に帰着される。Shadow system の定常解に関しては、活性因子の拡散係数が十分小さい場合、領域の内部や境界上のただ一点で最大値を達成する解の存在が知られている(W.-M. Ni and I. Takagi (1991, 1993), J. Wei (1997) など)。これらの結果はいずれも領域自身は固定されているとしている。そこで本章では活性因子の拡散係数が 0 に収束するとき平面内の単純閉曲線に縮退するような等幅(平面)領域の族を考え、そのような細い領域におけるパターン形成の様子を考察する。解析の方法は J. Wei (1997) を参考にした。その結果、領域の幅を表すパラメータに適切な条件を課すことにより、次の結果が得られた。つまり、十分小さい各拡散係数に対して、領域の境界上にただ一つの最大値を達成する点 P を持つような解が存在すれば、拡散係数がゼロに近づくととき、点 P は境界の曲率の臨界点に近づく。また、もし点 P が境界の曲率の非退化臨界点ならば、点 P に収束する境界上の点列が存在して、各点列の要素に対して、その一点で最大値を達成するような解が存在する。

論文審査の結果の要旨

鈴木香奈子が提出した博士論文は、生物の形態形成のモデルとして A. Gierer と H. Meinhardt によって提唱された活性因子-抑制因子型の反応拡散方程式系に対する初期・境界値問題の解の存在と挙動、および定常解の漸近形を論じたものである。この系は活性因子の濃度 $u(x,t)$ と抑制因子の濃度 $v(x,t)$ に対する連立半線型拡散方程式であり、斉次 Neumann 境界条件を課す。方程式には活性因子の拡散係数 ϵ^2 、反応項 u^p/v^q 、基礎生産項 $\sigma(x)$ 、抑制因子の反応時定数 τ 、抑制因子の拡散係数 d 、反応項 u'/v^s が含まれる。活性因子が多く集まった場所から細胞や組織の変化が始まると解釈される。著者はつぎの三つの結果を得た。

(i) 活性因子が自分自身を増やす率 $p-1$ よりも抑制因子を増やす率 r の方が大きいときには、解は決して有限時間で爆発せず、すべての時間にわたって存在する。さらに、活性因子の基礎生産項 $\sigma(x)$ が恒等的には 0 でない場合には、吸引矩形が存在する。すなわち、十分時間が経てば、解は初期値に無関係に一様に有界である。

(ii) 活性因子と抑制因子の拡散係数をともに 0 として得られる常微分方程式系の解軌道の極限集合をすべて分類した。まず、非線型項 u^p/v^q 、 u'/v^s の指数の大小関係を三つに分け、それぞれの場合について反応時定数 τ の大小に応じて五つの場合に分かれる。解がすべての正の時間において存在する場合にも二通りあり、有界にとどまることもあれば、非有界な解を許すこともあること、また、有限時間で爆発する解は u だけが爆発し、 v は有限にとどまることが殆どであることなどを明らかにした。

(iii) 抑制因子の拡散係数を無限大とした極限方程式系に対する定常問題を考察する。平面内の単純閉曲線に縮むような等幅領域の族において活性因子の拡散係数が十分小さい状況を考える。最大値が境界上のただ一点において達成されるようなものに対し、最大点の位置は曲率の臨界点に近いことを明らかにした。

以上の結果は、反応拡散系によるパターン形成の研究において重要な寄与をなすものであり、今後の研究を大いに刺激するものと期待できる。また、(i)、(ii) の結果を得るにあたり、著者は数値シミュレーションを行い解の挙動を予想しながら可能性を絞り込んでいった。とくに、(ii) においては、パラメータの値が二つの領域の境界にあり、解の挙動の判定が困難な場合があったが、著者はそれを処理するために未知関数を適当に置き換えて、非線型項が二次多項式になるように変換すると云う巧妙な方法を提出した。これにより分類が完成した。(iii) は難解な J. Wei の論文を読みこなし、その方法を駆使して平面内の単純閉曲線に縮退していくような細い領域におけるパターン形成の理論の基礎を確立した。

これらは、著者が自立して研究活動を行うに必要な高度の研究能力と学識を有することを示している。したがって、鈴木香奈子提出の論文は博士(理学)の学位論文として合格と認める。