氏名・(本籍)	キン ピュー ピュー トゥー KHIN PHYU PHYU HTOO
学位の種類	博　士(理　学)
学位記番号	理博第2223号
学位授与年月日	平成18年3月24日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
研究科，専攻	東北大学大学院理学研究科（博士課程）数学専攻
学位論文題目	Existence and Asymptotic Behavior of Solutions to a Nonlinear Parabolic System Modeling Bacterial Colony Patterns (バクテリアコロニーに見られるパターン形成のモデル方程式系の大域解とその漸近挙動)
論文審査委員	(主査) 教授 高木　泉 教授 柳田英二 助教授 清水　悟

論　文　目　次

論　文　内　容　要　旨

In this thesis, we consider the global existence and asymptotic behavior of solutions to a diffusion-chemotaxis-growth system which models pattern formation by a bacterial colony. Bacteria are known to be responsible for many diseases and also for the recycling. It is amazing that a colony of bacteria can produce complex patterns. Budrene and Berg observed in experiments that a chemotactic strain of *E. coli* generate surprisingly complex and ordered spatial patterns. In order to understand analytically why they generate such patterns, Professor Mimura and his group proposed a mesoscopic model governed by a diffusion-chemotaxis-growth system. They suggest by numerical simulations that the resulting patterns are possibly generated in a self-organized way. However, the rigorous study of this system has not been done yet. It is one of the purposes of this thesis to establish a mathematically rigorous theory to treat Mimura's model.

It is assumed in Mimura's model that the bacteria have two states. The active bacteria move around randomly, and take nutrients in the environment. In addition, they release a certain chemical which causes a directed movement toward its higher concentration (chemotaxis). Some of the active bacteria become inactive at a rate depending on the population of the active bacteria and the nutrient concentration. Assume that the bacteria occupy a bounded domain

Ω in $\mathbb{R}^N$ with smooth boundary $\partial\Omega$. The proposed model comprises the population density of the active bacteria $u(x,t)$, the population density of the inactive bacteria $w(x,t)$, the density of nutrient $n(x,t)$, and the concentration of the chemoattractant $c(x,t)$ at position $x \in \Omega$ and time $t \in [0,\infty)$.

The main results of the thesis are stated as follows:

First, in Section 1 we prove that the initial-boundary value problem has a unique solution for a certain time interval $0 \leq t \leq T$, where T is a small positive constant depending on the initial data. In order to solve the initial-boundary value problem we follow the standard approach: (i) we formulate it as a system of ordinary differential equations in a suitable Banach space and then convert it into a system of integral equations by way of analytic semigroups of operators and fractional powers of closed linear operators, (ii) by applying the Contraction Mapping Principle, we prove that the system of integral equations has a unique solution, which is called a *mild solution* of this problem, and finally (iii) we show that the mild solution is indeed a classical solution of partial differential equations.

In Section 2, in the case of spatial dimension one we prove that the initial-boundary value problem for the system has a unique solution on the entire time interval $(0,+\infty)$, and that the solution remains bounded. The proof is carried out by giving bounds on the L^2-norm of the partial derivatives u_x, u_{xx}, n_x, n_{xx}, c_x, c_{xx}, c_{xxx}. To derive the bounds on these quantities, we first observe that the L^1-norms (with respect to the spatial variable) of u, n, c, w remain bounded. Then we prove the boundedness of the L^2-norm of c_x by making use of the uniform estimate of the L^1-norm of u and the assumption $N = 1$. Once we know that c_x is bounded in L^2, we can apply the method developed by Osaki and Yagi in their study of Mimura-Tsujikawa model and obtain the estimates of u and n. We emphasize that our results are sharper than those by Osaki and Yagi.

Finally, in Section 3, as an application of the various estimates derived in Section 2 we will study the asymptotic behavior of the solution as $t \to +\infty$, and show that $u \to 0$, $c \to 0$ as $t \to +\infty$, while n converges to a non-negative constant. This assertion implies that the population of active bacteria, the distribution of nutrient as well as the chemoattractant converge to a trivial steady-state as $t \to \infty$, so that no pattern is observed among these variables. The observable pattern is formed due to the inactive bacteria $w(x, t)$. This suggests that the formation of nontrivial patterns in this model is a purely transient phenomenon. Hence, to understand the pattern formation in bacterial colonies we have to develop new methods which are suitable for such a transient process.

論文審査の結果の要旨

キンピューピュートゥーが提出した博士論文は，バクテリアのコロニーに見られるパターン形成をモデル化した「拡散－走化性－増殖」方程式系の解の構成とその漸近挙動を論じたものである。モデルの提唱者は三村昌泰氏である。方程式系の未知函数は，位置 x，時刻 t における活動的バクテリアの個体群密度 $u(x, t)$，環境中の養分の濃度分布 $n(x, t)$，活動的バクテリアが分泌する誘引化学物質の濃度 $c(x, t)$ および非活動的バクテリアの個体群密度 $w(x, t)$ の四つである。特に $u(x, t)$ に対する方程式は，拡散項，走化性を記述する項および増殖項をもつため，上のように呼ばれている。なお，$w(x, t)$ は残りの三函数が分かれば自動的に決まるので，実質的には三元連立放物型偏微分方程式となる。さらに，斉次ノイマン境界条件を課すものとする。

著者は，次の三つの結果を得た。

(i) この方程式系に対する初期－境界値問題は，境界条件を満たす十分滑らかな初期値に対して，時間に関して局所的な一意的な古典解をもつ。

(ii) 空間次元が1の場合は，解はすべての $t>0$ に対して存在し，かつ x についての最大値は有界である。さらに，u_t，u_{xx}，c_t，c_{xxx}，n_t，n_{xx}，n_t の x に関する平方積分を $t=T$ から $t=T+1$ まで積分したものは T に関して一様有界である。

(iii) $t\to\infty$ のとき，x について一様に u は0に，n は C に，c は0に収束する。ただし，C は正定数である。

以上の結果により，三村モデルでは，活動的バクテリアはすべて非活動的になり，それだけではパターンがなくなることが判明した。もし持続的なパターンが存在するとすれば，それは非活動的バクテリアの個体群密度 $w(x, t)$ によって形成されていることになる。さらに，w の挙動を研究するためには u と n の比較的長時間にわたる挙動を詳しく知る必要があることが明らかにされた。ここに本学位論文の大きな価値がある。また，(ii) の評価を導くにあたり，大崎，八木両氏が二成分の拡散－走化性－増殖方程式系の解の評価を導出するために用いた方法を参考にしている。しかし，解の一様有界性を示すために，より詳しい評価を導き出しており，単なる機械的適用を超えた著者の貢献を認めることができる。加えて，解の漸近挙動を調べるため，様々な評価を用意し，コンパクト性を示しておき，最後に空間平均が0に収束することを確かめて証明するなど，独自の工夫が見られる。

これらは，著者が自立して研究活動を行うに必要な高度の研究能力と学識を有することを示している。したがって，キンピューピュートゥー提出の論文は博士（理学）の学位論文として合格と認める。