氏名・(本籍)	渡辺正芳（わたなべ まさよし）
学位の種類	博士(理学)
学位記番号	理博第2468号
学位授与年月日	平成21年3月25日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
研究科，専攻	東北大学大学院理学研究科（博士課程）数学専攻
学位論文題目	Metric Measure Geometry of Ricci Curvature (リッチ曲率の測度距離幾何)
論文審査委員	(主査) 教授 塩谷 隆 教授 宮岡礼子 准教授 山田澄生

論文目次

1 Introduction **1**

2 Preliminaries **9**

2.1 Hausdorff Dimension 9

2.2 Length Spaces 10

2.3 Gromov–Hausdorff Convergence 11

2.4 Measured Gromov–Hausdorff Convergence 12

3 Bishop–Gromov Inequality 14

3.1 Generalized Bishop–Gromov Inequality 14

3.2 Local Cut Points 23

4 Ricci Curvature for Measured Length Spaces 40

4.1 Wasserstein Space 40

4.2 Volume Distortion Coefficients 42

4.3 Displacement Convexity Classes 43

4.4 Weak Curvature-Dimension Condition 45

5 Poincaré Inequality 47

5.1 Poincaré Inequality 47

5.2 Local Cut Points and Poincaré Inequality 49

6 Brunn–Minkowski Inequality 52

6.1 Concentration of Measure 52

6.2 Brunn–Minkowski Inequality 54

6.3 Discretization 63

論 文 内 容 要 旨

本論文では，測度を持った距離空間(測度距離空間) の幾何学と測度の集中現象の研究を行った．特に，リッチ曲率が下に有界であるという概念が定まった一般の測度距離空間に対するリーマン幾何学の研究を行った．

リッチ曲率が下に有界な測度距離空間

1950 年代にA.D. Alexandrov は三角形を比較することによって断面曲率が下に有界な距離空間（アレキサンドロフ空間）を定義した．その後，アレキサンドロフ空間に対するリーマン幾何学やその上の解析学が盛んに研究され，最近では G. Perelman によるサーストンの幾何化予想の証明の最終段階にアレキサンドロフ空間が使われている．

そこで，一般の距離空間に対してリッチ曲率が下に有界という概念は何かという問題は自然であるが，ごく最近になって J. Lott・C. Villani とK.-T. Sturm は独立にリッチ曲率が下に有界な測度距離空間を定義した．その条件は曲率次元条件 CD(K, N) と呼ばれている．K と N はそれぞれリッチ曲率の下限と次元の上限の役割をするパラメータであり，リーマン距離 d とリーマン測度 μ を備えたリーマン多様体(M,d,μ)に対しては

$$\mathrm{CD}(K, N) \Longleftrightarrow \text{リッチ曲率} \geq K \text{ かつ 多様体の次元 } \leq N$$

という関係がある．彼らの定義は，砂の山をある場所にいかに効率良く運ぶことができるかという最適輸送問題に基づいたものであり，まだ幾何学的な結果が少ないことを注意したい．曲率次元条件は空間の列の収束によって保たれるので，リッチ曲率が一様に下に有界なリーマン多様体の列のグロモフ・ハウスドルフ極限空間は曲率次元条件を満たす．また，重要な例として，ルベーグ測度を持った有限次元バナッハ空間は Lott・Villani と Sturm の意味で非負リッチ曲率である．

リッチ曲率に関する結果の概要

第 3 章と第 4 章では測度と距離の性質をうまく使うことで，リッチ曲率が下に有界な測度距離空間のリーマン幾何学の研究を行った．実際には，桑江一洋・塩谷隆，太田慎一，Sturm らによって考察されている曲率次元条件より弱いビショップ・グロモフ型の不等式を満たす空間を扱っている．

まず，局所的な幾何構造を調べるために局所切断点に注目した．局所切断点とは，その点を取り除くことで空間が局所的に非連結になるような点のことである．リッチ曲率が下に有界な多様体の極限空間に対しては，空間が 1 次元でなければ局所切断点は存在しないことが予想されている．論文ではリッチ曲率が下に有界な測度距離空間が局所切断点を持ったならば，その次数（点から出る成分の個数）は高々 2 個であることを示した．応用として，空間のエンドの個数の評価を行った．エンドとは十分大きいコンパクト集合の補集合の有界でない連結成分のことである．特に，非負リッチ曲率の測度距離空間のエンドは高々 2 個であることを証明した．これはリーマン多様体やその極限空間においてはチーガー・グロモール及びチーガー・コールディングの分裂定理という強力な結果から従う結果である．ところが，非負リッチ曲率，すなわち CD($0, N$) を満たす測度距離空間に対しては一般に分裂定理が成り立たない．バナッハ空間が反例である．

第 5 章ではもうひとつの弱い条件であるポアンカレの不等式を満たす測度距離空間の局所構造も考察しており，局所切断点の存在に対する障害条件を得ている．

測度の集中現象

標準球面を考えると，次元が高くなればなるほど一様測度は赤道のまわりに集中することがわかる．第6章ではいつこのような測度の集中現象が起きるのかを考察した．

レヴィ・グロモフの等周不等式により正リッチ曲率リーマン多様体において測度の集中現象が起きることがわかる．また，Lott・Villani は正リッチ曲率つまりある正定数 K に対して曲率次元条件 $CD(K, N)$ を満たす測度距離空間上で弱い形の対数ソボレフの不等式を証明している．それから測度の集中が従うことは一般論によってわかっている．

測度集中に関する結果の概要

本論文では，正リッチ曲率であることより弱く，離散空間に対しても意味を持つような近似版ブルン・ミンコフスキーの不等式 ϵ-BM(K, N) と呼ばれる条件の下で測度の集中現象を証明した．ϵは近似のパラメータである．Lott・Villani と Sturm の $CD(K, N)$ は離散空間に対しては意味がないことを注意したい．ユークリッド空間$\mathbb{R}^n$における古典的なブルン・ミンコフスキーの不等式は次を主張する．

$$|(1-t)A_0+tA_1|^{1/n} \geq (1-t)|A_0|^{1/n}+t|A_1|^{1/n}$$

が任意の空でないコンパクト集合$A_0, A_1 \subset \mathbb{R}^n$と任意の $t \in [0, 1]$ に対して成り立つ（我々の記号では 0-BM$(0, n)$ である)．ここで，$|\cdot|$ は n 次元ルベーグ測度を指し，$(1-t)A_0+tA_1$ はミンコフスキー和である．ミンコフスキー和は測度距離空間においても自然に定義され，正曲率空間を考えるため我々のブルン・ミンコフスキーの不等式 ϵ-BM(K, N) には体積のひずみを表す係数が含まれる．なお，

$$CD(K, N) \implies 0\text{-BM}(K, N) \implies \epsilon\text{-BM}(K, N)$$

という関係が成り立つ．我々の結果は正リッチ曲率のリーマン多様体や測度距離空間における測度集中の幾何学的な別証明も与えている．さらに，対数ソボレフの不等式を経由した証明より，簡単な証明で，よい評価を与えた．

論文審査の結果の要旨

リーマン多様体の断面曲率がある定数以上という「断面曲率の下限条件」は、ある種の三角形の比較条件と同値となることが、Alexandrov と Toponogov によって証明された。また Alexandrov は一般の距離空間において、その三角形の比較条件により断面曲率の下限条件を定義・研究した。そのような距離空間の研究は、断面曲率の理解を深めるのに役立った。また最近の Perelman による幾何化予想の証明にも本質的に用いられた。この一方で、リーマン多様体上のリッチ曲率は、三角形などの素朴な幾何というより、ラプラシアンや調和解析といった解析的対象との結び付きが強く、距離空間などへの一般化は困難とされてきた。しかし数年前，Sturm と Lott-Villani は測度距離空間のリッチ曲率の下限条件を、Otto や MacCann の仕事を参考にして定義・研究した。これを発端として、測度距離空間の研究が急速に進みつつある。この研究は単にリーマン多様体の結果の拡張というだけでなく、非常に非自明かつ興味深い例を含み、また多様体の収束・崩壊の研究、無限次元空間の研究などとも関係して重要である。

本論文では、上記のリッチ曲率の下限条件より弱い「BG」と呼ばれる条件の下で、空間の位相幾何学的な性質について考察した。条件 BG とは、Bishop-Gromov の不等式の無限小版で定義される条件であり、測度縮小条件と類似しているが、それより若干弱い条件である。リッチ曲率が下に有界なリーマン多様体やその測度付 Gromov-Hausdroff 極限は条件 BG をみたすが、これをリッチ曲率の積分条件に緩めても BG が成り立つと予想される。空間の一点 p が局所切断点であるとは、その点の十分小さい近傍から p を取り除くと非連結となるときをいう。またその連結成分の個数を p の指数と呼ぶ。本論文では、測度距離空間が条件 BG をみたすとき、任意の局所切断点の指数の上からの評価を与えた。さらに応用として、非コンパクトな測度距離空間のエンドの個数の評価を行った。ここで、BG をみたす測度距離空間としては、グラフなど多様体ではない分岐を許すような空間をも考えていて、従来のリーマン多様体の研究とはまったく異なるものをも対象としている。また、今までリッチ曲率や BG をみたすような空間の研究としては、主に解析的な不等式などの成果しか知られていなかったが、上記の結果は極めて幾何学的であり、この意味で独創性が高い研究である。

さらに、本論文では、リッチ曲率の下限条件よりは弱いが、BG よりは強いような条件「BM」を考え、その下で、測度の集中現象が起こることを証明した。条件 BM は Brunn-Minkowski の不等式を一般化したものである。またこの定理は離散空間や無限次元空間にも適用可能である点が、特徴的である。従来知られていた対数ソボレフ不等式を用いた解析的な証明方法とは違って、極めて幾何学的かつ明解な証明方法による。

本論文の研究は、リッチ曲率のより深い理解に繋がる重要なものと位置づけられる。これは専門的に価値の高いものであり、著者が自立して研究活動を行うに必要な高度な研究能力と学識を備えていることを示している。よって、渡辺正芳提出の論文は博士(理学)の学位論文として合格と認める。