氏名・(本籍)	小野寺（おのでら） 有紹（みちあき）
学位の種類	博　士（理　学）
学位記番号	理博第２５３１号
学位授与年月日	平成22年３月25日
学位授与の要件	学位規則第４条第１項該当
研究科，専攻	東北大学大学院理学研究科（博士課程）数学専攻
学位論文題目	Asymptotics of Hele-Shaw flows with multiple injection points (複数の注入点をもつ Hele-Shaw 流の漸近挙動)
論文審査委員	(主査) 教授　高木　泉 教授　小薗英雄 教授　酒井　良（東京都立大学名誉教授）

論 文 目 次

論 文 内 容 要 旨

本論文では，複数の点から非圧縮性粘性流体を注入したときに現れる Hele-Shaw 流を記述する自由境界問題に対し，時間が十分経過した後の自由境界の形状について考察する．また，初期時刻において流体が占める領域の境界に摂動が加えられた場合に，時刻とともにその摂動がどのような振る舞いをするかについて考察する．

一般に，Hele-Shaw 流とは，Hele-Shaw セルと呼ばれる間隔の狭い 2 枚の平行平面板からなる装置における非圧縮性粘性流体の流れをいう．平面板の間隔が十分に狭いことから，Hele-Shaw 流は 2 次元流とみなすことができる．また，粘性流体の流れであるにもかかわらず，Hele-Shaw 流は圧力をポテンシャルとするポテンシャル流となることが導かれる．したがって，流体が非圧縮性であるという仮定から，Hele-Shaw 流の圧力場は調和函数となる．

初期時刻においてセル中へあらかじめ流体が注入されてあり，流体がセル中のある領域を満たしている状況を考える．その領域の複数の点からそれぞれ異なる注入率で同じ流体を注入していくとき，その流体の界面は時間とともに変化する．このとき，界面はどのような挙動を示すであろうか．この問題は，流体の圧力場および時間とともに変化する領域を未知量とする自由境界問題として数学的に定式化される．ここで，各時刻における圧力場は，それぞれの注入点で注入率に比例する特異性をもち，領域の境界上で斉次 Dirichlet 境界条件をみたす調和函数となる．また，各時刻における境界の法線方向への成長の速さは，その点における圧力場の法線微分に比例する．

第 2 章では，Hele-Shaw 流における自由境界が時間の経過とともに，注入点の注入率を重みとする重心を中心とする円盤に近づくことを，その定量的な評価とともに示す．

自由境界問題を扱う上での難しさは，一般に，先見的には分からない自由境界の正則性および変化する領域のトポロジーに起因する．この問題の一つの解決策は，境界の正則性を要求せず，また，領域のトポロジーの変化を許容するような弱解，すなわち一般化された解，を考察することである．Sakai は求積領域の理論を基礎として，Hele-Shaw 流の問題に対し，弱解の概念を導入した．この弱解は Richardson が発見した複素モーメントの関係式の拡張としてみることができる．これは，1 点から流体を注入したときに現れる Hele-Shaw 流の場合，各時刻における流体の領域の注入点を中心とする可算無限個の複素モーメントは初期時刻におけるそれと等しい，と述べることができる．一般の場合であっても，各時刻の流体の領域のそれぞれのモーメントは，初期領域のモーメント，注入点の位置およびその注入率により計算される．このことから，Hele-Shaw 流の問題の弱解を構成することは，各時刻において，与えられたモーメントから領域を再構成することとして考えることができる．

本論文では，2 点の注入点をもつ Hele-Shaw 流に対し，複素解析学的手法を用いて単位円盤を各時刻の領域に写すような等角写像を具体的に構成する．ただし，それらの等角写像に含まれる係数はある代数方程式の解として定まるものである．時間の経過とともに対応する等角写像の係数がどのように振る舞うかを考察することにより，領域の漸近形状についての定量的評価を得ることができる．各時刻に対応する等角写像の構成は，次に述べるように，対応する Schwarz 函数が与えられた条件をみたすような閉曲線を構成することに帰着される．ここで，Schwarz 函数とは，与えられた曲線の近傍上で正則な函数で，その曲線上の各点をその複素共役に写すものである．実際，初期領域が空集合のとき，すなわち初期領域が注入点にのみ退化しているとき，各時刻における領域の構成は，対応する Schwarz 函数が注入点および注入率に対応する特異点をもつような閉曲線を見つけ，その曲線を境界とする領域を構成することに帰着される．

そこで，複数のパラメーターをもつ等角写像を導入し，その単位円盤のそれぞれの像の境界に対応するSchwarz 函数を考える．Schwarz 函数が与えられた特異性をもつようにパラメーターを選ぶことにより，その時刻での領域へ単位円盤を写す等角写像を具体的に構成することができる．3点またはそれ以上の注入点をもつ場合は，帰納法および2点の場合の精密な評価を用いることにより評価が得られる．ここで，複数の場合を2点の場合に帰着する際には，求積領域の半群の性質が基礎となる．

第3章では，上記の自由境界の漸近形状に対する結果の証明の過程で得られた，等角写像の像として具体的に表示される解の安定性を考察する．すなわち，2点の注入点からの注入により生成される Hele-Shaw 流の界面がその摂動に対し安定であるかどうか，またその安定性がどの程度なのかについて考える．動く界面を函数表示し，自由境界問題をその函数についての発展方程式として捉え，作用素の解析的半群の理論を用いることにより，その具体解の安定性が得られる．このとき，摂動は2階までの微分，すなわち曲率も込めて，時間の経過とともに多項式程度の減衰率で減衰することが示される．

未知函数および変動する境界を求める自由境界問題において，その自由境界をある固定された定義域上の函数のグラフとして表現することにより，問題は未知函数と境界の表示函数に対する偏微分方程式系として捉えることができる．しかし，一方の函数の定義域は依然として動く領域である．そこで，Hanzawa は各時刻においてその領域を固定された領域へと写す微分同相写像を用いることにより，問題を固定境界上の偏微分方程式系に変換した．実際，Hele-Shaw 流の問題は微分同相写像を介して固定境界上の方程式系に変換され，さらに一方の未知函数を他方に代入することにより非局所的な単独の偏微分方程式として取り扱うことが可能となる．Escher と Simonett はこの単独方程式を適当な Banach 空間における発展方程式として捉え，作用素の解析的半群の理論を用いることにより解の時間局所的存在を示した．しかし，上記の微分同相写像による固定境界問題への変換は，空間局所的にのみ定義されるため，境界が時間が経過するにつれ大きく変動する場合には，局所的な時間に対してのみ適用可能となる．したがって，解の大域的挙動を調べるためには，適当な空間方向のスケール変換が必要となる．注入点が1点の場合，適当なスケール変換の下，初期領域が注入点を中心とする円盤に十分近い領域の場合には，時間が経過しても領域はその形状を円盤の近傍に留めることができる．このような状況の下，Vondenhoff は注入点が1点の場合に同心円状に成長する界面の安定性を示した．

注入点が2点の場合に安定性を調べるため，第2章で構成した等角写像を用いる．この等角写像を用いて，成長する界面をその逆像がどのように成長するかどうかという問題として考える．このとき，安定性の考察対象である成長する界面は単位円周に写される．したがって，函数表示したときにこの解は定常解とみなすことができ，問題はこの定常解の安定性となる．一方，この等角写像は具体的に表示されるため，逆像を通し得られる方程式もまた具体的に表示される．これを発展方程式として捉え，定常解の安定性を議論するのであるが，このとき方程式は完全非線形の問題となる．すなわち，発展作用素の主要部である線形作用素の定義域と剰余部の作用素のそれとが同等となる．したがって，半線形発展方程式の理論が適用できないため，Da Prato と Grisvard による最適正則性をもつ空間，すなわち連続補間空間，において方程式を考察する．しかし，注入点が2点の場合には，1点の場合と異なり，方程式は本質的に非自励系となるため，最適正則性をもつ空間での自励系方程式に対する既知の結果を直接用いることはできない．そこで，まず，時間が十分経過した後の線形化作用素の挙動を調べることにより，方程式が時間とともに漸近的に自励系となることを示す．次に，自励系方程式に対する線形化安定性に関する結果を改良し，漸近的に自励系であるような方程式に対しても同様の結果が成り立つことを示す．以上の結果とともに線形化作用素のスペクトルの考察から，界面の安定性および摂動の減衰率が多項式程度であることがわかる．

論文審査の結果の要旨

本論文は，ヘレ＝ショー流とよばれる狭い間隔で置かれた２枚の平行平板の間に流体を注入するときに生じる流体の占める平面領域がどのような形状をとるかという自由境界問題を研究したものである．流体の占める領域の境界を界面とよぶ．二つの結果が得られている．

まず，注入点が有限個あり，一定のしかし各点で独立な速度で注入する場合に，時間が十分経過した後には，界面は注入点の注入速度による重み付き重心を中心とする円周に漸近することを証明した．円の半径は時間変数の平方根に比例するが，界面と円周との距離に関する精密な評価を与えている．証明の方法は，注入点が二点の場合の界面の表示公式を導き，詳細な漸近挙動を求めた．三点以上の場合は，注入点の個数に関する帰納法による．そのために，複素変数函数論の分野で開拓された求積領域の理論が本質的に用いられている．特に，シュワルツ函数を用いて二点から異なる速度で流体を注入する場合の界面を，その形状が解析できるまでに具体的な表示公式を求めたことは重要な寄与である．

次に，二点から注入された流体が占める領域は上の結果から（時間変数の平方根に比例する半径をもつ）ある円板に漸近することが分かる．十分時間が経った後に，その界面が何らかの擾乱を受けたとき，その擾乱がどのような位相で減衰するかという界面の安定性の問題を考える．もし擾乱が二階偏導函数まで込めて十分小さいとき，その影響は時間変数の代数的指数で減衰することが証明されている．その証明は，非線型発展方程式の理論を用いる函数解析学的方法によるものである．強い非線型性を処理するため，Da PratoとGrisvardによって導入された最大正則性空間における完全非線型発展方程式の理論を漸近的自励系に適合するよう工夫している点が新しい．

以上の結果は，代表的な自由境界問題の一つであるヘレ＝ショー流の数学的研究に重要な寄与をなすものであり，今後の研究を大いに刺激するものと期待できる．

これらは，著者が自立して研究活動を行うに必要な高度の研究能力と学識を有することを示している．したがって，小野寺有紹提出の論文は博士（理学）の学位論文として合格と認める．