氏名・(本籍)	加藤裕基（かとうゆうき）
学位の種類	博　士(理　学)
学位記番号	理博第２５９２号
学位授与年月日	平成23年３月２日
学位授与の要件	学位規則第４条第１項該当
研究科，専攻	東北大学大学院理学研究科（博士課程）数学専攻
学位論文題目	The isomorphism between motivic cohomology and K-groups for equi-characteristic regular local rings (等標数正則局所環におけるモティヴィックコホモロジーとK-群の間の同型写像)
論文審査委員	(主査) 教授 花村昌樹 教授 都築暢夫，雪江明彦

論文目次

論文内容要旨

スキームXに対して2つのアーベル群，高次代数的K-群$K_n(X)$と高次Chow群$CH^r(X, n)$が定義される(n, rは0以上の整数)．最初，高次K群はQuillen[9]によって定義された．高次Chow群はBloch[1]によって初めて定義され，準射影的代数多様体に対して，その高次K-群と高次Chow群が有理数体に係数拡大した後に同型であることを証明した．すなわち$K_n(X)_Q$のAdams作用素Ψ^kの固有値k^r (kは2以上の整数でrは自然数)の固有空間と$CH^r(X, n)_Q$が同型であることを証明した（アーベル群の下にQと書いた場合は係数を有理数体Qに拡大して得られる有理数係数線型空間を表す)．

高次K-群と高次Chow群についてもう少し説明すると，スキームX上のベクトル束の圏P(X)を用いてそのQ-構成の分類空間BQP(X)のホモトピー群として定義される．高次Chow群はスキームXの代数的サイクル$Z^r(X)$のなすアーベル群のある部分商として代数的に定義される．本博士論文の主定理は，体上有限型とは限らない等標数正則局所スキームに対しても，高次K-群と高次Chow群が同型であること証明したことである．

主定理（定理3．4．5）

任意の等標数正則局所環Rのスペクトラム Spec Rについて，有理数体に係数拡大した後に，代数的K-群のAdams作用素の固有空間 $K_n(\mathrm{Spec}\ R)_{\mathbb{Q}}^{(r)}$ から高次Chow群へのサイクルクラス写像 $cl^{(r)}$は同型である．すなわち，

$$cl^{(r)} : K_n(\mathrm{Spec}\ R)_{\mathbb{Q}}^{(r)} \to CH_{zar}^r(\mathrm{Spec}\ R,\ n)_{\mathbb{Q}}$$

は同型である．ただし，$CH_{zar}^r(X,\ n)$はモティヴィックコホモロジーと呼ばれていて，Xが体上滑らかなスキームに対しては高次Chow群と同型になるアーベル群である．

等標数正則局所環の例は，体F上の多変数形式的べき級数環$F[[x_1,\ x_2,\ ...,\ x_m]]$などが相当する．主定理によって新たにこれらの環についても高次K-群と高次Chow群の比較が可能になる．

これまで高次K-群は任意のネータースキームに対して定義されているのに対して，高次Chow群は高々1次元の基底スキーム上有限型なスキーム（代数多様体は0次元の基底スキーム上有限型）にしか定義，あるいは定式化されていなかった．より一般的なスキームに対して高次Chow群を定式化しようとするとき，局所化完全列の存在や関手性などの重要な性質が成り立つにようにする必要がある．基底スキームが高々1次元の場合，Blochにより定義された高次Chow群が局所化完全列を持つことや，基底スキーム上滑らかなスキーム間の（有限型）射に対する反変関手性を持つことが，Bloch自身[1]，[2]やLevine[5]，[6]により証明されている(Blochは基底スキームが0次元の場合に，Levineは後に基底スキームが高々1次元場合で証明している．ただし，本文では引用しなかったが，代数多様体の場合の局所化完全列の証明は[2]で初めて与えられた)．しかし現在でも，もっと一般的なスキームに対する高次Chow群を定式化する方法は確立されていない．例えば複素数係数上2変数形式的べき級数環$C[[x,y]]$のスペクトラムなどは基底スキームとして0次元のSpec Cを取れるが、Spec $C[[x,y]]$はSpec C上有限型では決してありえないし，Spec $C[[x,y]]$の高次Chow群の研究も行われていない．

本博士論文では高々1次元の基底スキーム上有限型なスキームとは限らないより一般的なスキームについて高次Chow群を考える必要がある．また任意のネーター正則スキーム間の射について，反変関手性が必要になる．仮にBlochによる高次Chow群の定義をそのまま一般のスキームに適用しても，反変関手性を持つことはわからない．

そこで，本博士論文ではFriedlander--Suslin--Voevodsky[4]により導入されたモティヴィック複体 $Z_X(r)$をもちいて高次Chow群の定式化を行う．任意のネータースキームXに対して，アーベル群$CH_{zar}^r(X,\ n)$をモティヴィック複体のハイパーコホモロジー群で定める:

$$CH_{zar}^r(X,\ n) = H_{zar}^{-n}(X,\ Z_X(r)).$$

Friedlander--Suslin[3]は体上滑らかなスキームXに対して，モティヴィック複体のハイパーコホモロジー群が高次Chow群に同型であることを証明した．本博士論文でもモティヴィック複体で定式化された高次Chow群$CH_{zar}^r(X,\ n)$をモティヴィックコホモロジーと呼ぶことにする．このモティヴィック複体を用いて定式化する（本博士論文における）最大の利点は，その反変関手性にある．すなわち任意のネータースキームの射$f: Y \to X$に対して射$f^* : Z_X(r) \to Z_Y(r)$が定まる．そしてこれは反変関手的である．本博士論文では第2章でモティヴィック複体の定義とその関手性の証明について説明を行っている．

本博士論文は主結果の説明のための前提知識となる部分を2章で説明し，博士論文の主結果のすべてを第3章で説明している．以下博士論文の構成を説明する．

本博士論文に出てくる環はすべて可換なネーター環である．題名にある等標数とは主に整域の場合に対して述べられる言葉で，各極大イデアルの剰余体と自身の商体の標数が等しいという意味である．
体を含む整域と言っても同じ意味になる．例えば有理整数環Zは等標数ではなく，混標数と呼ばれる．本文では混標数の場合を考えていないことを明確にするため等標数という言葉を用いている．スキームは特に断らない限り全てネータースキームとする．ただし，スキーム間の射は有限型でない場合も考えている．
「スキームの射が滑らかである」の定義には有限型も含まれている．

第2章の始めの部分は主に代数的K-理論の復習を行っている．まず単体的ホモトピー理論の中で単体的集合の定義，特に分類空間の定義，そのスペクトラムの定義を復習している．次に2章の前半部分で代数的K-理論の復習を行っている．本博士論文ではWaldhausen[11]の導入したS構成を用いて高次K-群を定義する．このようなK-群の構成はWaldhausen K-理論と呼ばれる． Waldhausen K-理論はQuillenの定義よりも，サイクルクラス写像が具体的に構成できるという点で利点をもつ． Waldhausen自身は[11]においてはWaldhausen K-理論をスキームに応用させることは行っていない．スキームに対してWaldhausen K-理論を初めて応用させたのはThomason--Trobaugh[10]で，彼らはそこで局所化完全列の証明を与えることでスキームに対するWaldhausen K-理論を確立させた．従って本博士論文でもThomason--Trobaugh[10]の一部に従いスキームのK-理論を説明している．また，Waldhausen K-理論を用いるとK-群も反変関手性を持つ．次にK-群に作用するAdams作用素の定義を説明している．K-群を有理数体上に係数拡大した後、自己準同型であるAdams作用素によりK-群は固有値分解することが知られている．固有値分解については主に3章で取り扱われている．

2章の後半部分ではモティヴィック複体の定義を復習している．モティヴィック複体は代数的サイクルのなかで基底スキーム上等次元なものからなる部分群を用いて定義される．本博士論文では等次元サイクル*Zequi*（X/S, r）の理論とモティヴィック複体の関手性を重点的に説明している．また2章の最後に，体上滑らかなスキームに対しモティヴィックコホモロジーと高次Chow群が同型であることを説明している．

第3章は本博士論文の主結果から構成される．
主定理の証明の方針は，Popescuの結果を用いて主定理の同型を体上滑らかな多様体の場合に帰着させることである．そのためにはいくつかの命題を証明する必要がある．本博士論文の本質的な結果はその命題たちである．

Popescuの定理は，等標数正則局所環はある体の上に滑らかな部分環の順極限に同型であるという主張である．それを主定理に適用するためには，サイクルクラス写像が関手的でAdams作用素と可換であることと，モティヴィックコホモロジーが順極限と可換であることを示す必要がある．そのために以下の3つの命題を証明した．3章では以下の順に命題を説明し，証明を与えている．

命題3．2．4．
サイクルクラス写像は任意のスキームの射について反変関手的である．

命題3．3．7．
体上滑らかなスキームXについて，モティヴィックコホモロジーからK-群へFriedlander--Suslinスペクトル

系列[3]

$$E_2^{pq} = CH_{zar}^{-q}(X, -p-q) \Rightarrow K_{-p-q}(X)$$

にAdams作用素が作用する.

この命題によりK-群のAdams作用素の固有値空間$K_n(\mathrm{Spec}\ R)_{\mathbb{Q}}^{(r)}$からモティヴィックコホモロジー$CH_{zar}^r(\mathrm{Spec}\ R, n)_{\mathbb{Q}}$へのサイクルクラス写像$cl^{(r)}$が定義される.

命題3. 4. 2.

S を正則なネータースキーム, $T_{\alpha\beta}$をS上滑らかなスキームの有向な射影系でその逆極限をTとする. また, XをT上有限型スキームで$X = X_0 \times_S T$となるS上有限型スキームX_0が存在すると仮定する. もしTが正則なネータースキームであり, 各移送写像がアファイン射で支配的ならT上の

Zarski 層の同型:

$$f_\alpha^* : Zequi\ (X_\alpha \times_{T\alpha} - / -, 0)_{\mathbb{Q}} \rightarrow Zequi\ (X \times_T - / -, 0)_{\mathbb{Q}}$$

ただし, $X = X_0 \times_S T$ で$f_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$は$T \rightarrow T_\alpha$ により導かれる射とする.

Pepescuの定理と命題3.4.2により$CH_{zar}^r(\mathrm{Spec}\ R, n)_{\mathbb{Q}}$ は体上滑らかなアファイン代数多様体のモティヴィックコホモロジーの順極限に同型であることがわかる. 命題3.2.4により主定理のサイクルクラス写像も順極限をとる操作と可換だとわかるので, 主定理の証明は体上滑らかなアファイン代数多様体の場合に帰着させることで行う. 3章の最後に主定理を証明している.

参考文献

[1] S. Bloch, Algebraic cycles and higher K-theory, Adv. in Math. 61 (1986), no. 3, pp. 267--304.

[2] S. Bloch, The moving lemma for higher Chow groups, J. Algebraic Geom. 3(1994), pp. 537--568.

[3] Eric M. Friedlander and A. Suslin, The spectral sequence relating algebraic K-theory to mo-tivic cohomology, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 35 (2002), no. 6, pp. 773--875 (English, with English and French summaries).

[4] Eric M. Friedlander, A. Suslin, and V. Voevodsky, Cycles, transfers, and motivic homology theories, Annals of Mathematics Studies, vol. 143, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2000.

[5] Y. Kato, The isomorphism between motivic cohomology and K-groups for equi-characteristic regular local rings, preprint (2010).

[7] M. Levine, Techniques of localization in the theory of algebraic cycles, J. Algebraic Geom. 10 (2001), no. 2, pp. 299--363.

[8] M. Levine, K-theory and motivic cohomology of schemes, I, K-theory preprint archives. (2004).

[9] D. Quillen, Higher algebraic K-theory. I, Algebraic K-theory, I: Higher K-theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972), Springer, Berlin, 1973, pp. 85--147. Lecture Notes in Math., Vol. 341.

[10] R. W. Thomason and T. Trobaugh, Higher algebraic K-theory of schemes and of derived categories, The Grothendieck Festschrift, Vol. III, Progr. Math., vol. 88, Birkh auser Boston, Boston, MA, 1990, pp. 247--435.

[11] F. Waldhausen, Algebraic K-theory of spaces, Algebraic and geometric topology (New Brunswick, N.J., 1983), Lecture Notes in Math., vol. 1126, Springer, Berlin, 1985, pp. 318--419.

論文審査の結果の要旨

加藤裕基は博士論文「The isomorphism between motivic cohomology and K-groups for equi-characteristic regular local rings」において，等標数正則局所環の代数的K群のアダムズ作用素についての固有空間と高次 Chow 群の間の比較同型を構成している.

代数的K群と高次Chow群の比較同型は体上のスムーズな代数多様体については知られていた. これはGrothendieckの定式化したRiemann-Roch型の定理の，Baum-Fulton-MacPhersonさらにBlochによる一般化の系である. またはBloch-Lichtenbaumにより始められFriedlander-Suslinにより一般化された，代数的K群と高次Chow群をつなぐスペクトル系列が退化することの系でもある. いずれにせよ，これらは体上の代数多様体についてのものであり，例えば体上の形式的べき級数環などの無限型の環について適用できるものではない. 代数的K理論は一般のネータースキームに対して考えることができるのに対し，高次Chow群をどのように定義すると適切かも明確でなかった.

加藤裕基は体のうえの正則なネータースキームに対し等次元サイクルの複体を用いて，高次Chow群の適切な定義を与え，それが正則なネータースキームについて反変関手をなすことを示した. これはSuslin-Voevodskyによるアイディアを用いている. さらに正則局所環の場合に，Friedlander-Suslinの議論を用いて，代数的K群のアダムズ作用素についての固有空間から高次Chow群への同型写像を定めた. その際，体上の正則局所環は体上スムーズなアフィン代数多様体の座標環の順極限であるというPopescuによる定理を用いて，スムーズな代数多様体の場合に帰着するという論法を用いた.

これらの研究成果は，加藤裕基が自立して研究活動を行うに必要な高度の研究能力と学識を有することを示している。したがって，加藤裕基提出の博士論文は，博士（理学）の学位論文として合格と認める。