氏名・(本籍)	藤嶋陽平（ふじ しま よう へい）
学位の種類	博　　士（理　　学）
学位記番号	理博第２６６７号
学位授与年月日	平成24年３月27日
学位授与の要件	学位規則第４条第１項該当
研究科，専攻	東北大学大学院理学研究科（博士課程）数学専攻
学位論文題目	Blow-up problem for a semilinear heat equation and diffusion coefficient （半線形熱方程式の爆発問題と拡散係数）
論文審査委員	（主査）教授　石毛和弘 教授　小川卓克 教授　小薗英雄

論文目次

論 文 内 容 要 旨

固体燃料の燃焼モデルなど，化学反応による発熱の温度分布を調べる際，半線形熱方程式がしばしば現れる．半線形熱方程式の解の爆発とは，非線形項の影響により解が有限時間で無限大に発散する非線形特有の現象であり，1966 年の藤田宏氏の研究以来，多くの研究者の関心を集めてきた．しかし，解の爆発集合の研究は，爆発のメカニズムを明らかにする上で重要な問題であるにもかかわらず，拡散項と非線形項の相互作用や領域の幾何的な情報など様々な要因が複雑に絡むため，初期値などの与えられた情報から爆発集合の特徴付けを行うことは困難を極める．本博士論文では，拡散係数が十分に小さい場合または十分に大きい場合を考察し，拡散項や非線形項の効果が解の形状に与える影響を詳細に研究することにより爆発集合の位置の特徴付けを行う．本論文の結果は爆発集合の位置の詳細さにおいて，既存の結果とは一線を画する．

本博士論文は 5 つの章から構成され，第 1 章においては研究の背景を述べ，本論文で扱う問題及び得られた主結果を紹介する．第 2 章以降の内容は次の通りである：

第 2 章　　一般の非線形性を持つ半線形熱方程式の爆発集合の位置；
第 3 章　　半線形熱方程式の爆発集合の位置と初期値の形状；
第 4 章，5 章　　十分に大きな拡散係数を持つ半線形熱方程式の爆発集合.

第 3，4，5 章の内容は石毛和弘氏（東北大学）との共同研究に基づく.

第 2 章では，冪乗型非線形項や指数型非線形項を含む一般の半線形熱方程式の爆発問題を考察し，特にディリクレ境界条件の下，拡散係数が十分小さいならば解が初期値の最大点近くでのみ爆発することを示す．ここでは，非線形項から決まる解の増大度に関する制限を課しているが，領域の形状や非線形性に対する強い制限条件などの既存の結果で課せられていた条件を本論文では課していないことに注意する．これらの結果は，初期値の最大点近くで解と同時に爆発する優解を構成することで得られるが，このような優解は 2004 年に柳下浩紀氏により初めて与えられた．しかし，柳下氏による優解は初期値の正則性や正

値性，非線形項の型，境界条件に強く依存しているため，氏の議論を我々の問題に直接適用することはできない．本章では，柳下氏による優解を精密化及び改良することにより，一般の半線形熱方程式に対して優解を構成し結果を得る．第 2 章の結果は，爆発時刻直前での解の最大点の位置から爆発集合の位置を特徴付けできることを意味し，一般の爆発集合の位置の研究への応用が可能となる．実際，第 3 章以降の結果は第 2 章の結果に基づき得られるものである．

第 3 章では，十分に小さな拡散係数を持つ半線形熱方程式，特に冪乗型非線形項の場合の爆発集合の位置を研究する．第 2 章では初期値の最大点近くでのみ解が爆発することを示したが，本章では初期値の最大点における平均曲率を用いた爆発集合の位置の特徴付けを行う．さらに爆発集合と初期値の最大点集合の距離の評価を与える一方，初期値に最大点が複数点存在する場合の爆発集合の位置に関する詳細な結果も与える．これらの結果は，拡散効果が解の短時間挙動に与える効果は微小なものであるが，その拡散効果は非線形項の影響により増幅され，爆発直前での解の形状及び爆発集合の位置に影響を及ぼすことで得られる．本章の結果は，熱方程式の解の短時間挙動が爆発直前での解の形状にもたらす効果を詳細に調べ，第 2 章の結果に帰着させることにより得られる．一般に爆発直前の解の形状を調べることは困難であるが，本章ではよく知られた劣解に摂動を加えた新たな優解を構成し，摂動部分を調整することで爆発直前での解の最大点近傍での形状を調べる．

第 4, 5 章では，全空間において半線形熱方程式の爆発問題を考察するが，第 2, 3 章とは異なり，拡散係数が十分に大きな場合を取り扱う．特に，正定数に適当な関数を摂動した初期値に対して，爆発集合の位置と熱方程式の解の時間大域的挙動との関係を考察する．このとき，摂動関数の積分量が正，零，負の場合によって，摂動関数を初期値とした熱方程式の解の最大点の時間大域的挙動が大きく異なり，それに応じて爆発集合の位置が大きく異なる．特に，摂動関数の積分量が正または零の場合には以下の結果を示す．

- 摂動関数の積分量が正の場合，拡散係数を大きくしていくと，爆発集合は摂動関数の重心に収束する．一方，対応する熱方程式の解の最大点は時間無限大で摂動関数の重心に収束し，爆発集合の極限と一致する．（第 4 章）
- 摂動関数の積分量が零の場合，爆発集合は拡散係数を大きくするに従い，摂動関数の 1 次モーメントから定まる方向に原点から離れていくが，これは対応する熱方程式の解の最大点挙動と一致する．（第 5 章）

これまでに，全空間における半線形熱方程式の爆発集合の位置と熱方程式の解の時間大域的挙動との関係を与えた結果はなく，この関係は本博士論文において初めて指摘されたものである．これらの結果は爆発直前での解の形状を調べ，第 2 章の結果に帰着させることで示されるが，対応する熱方程式の解の減衰評価や最大点挙動を詳細に調べる必要がある．ここでは，優解及び劣解を構成することにより解の挙動を考察し，爆発直前での解の形状に熱方程式の解の時間大域的な挙動が現れることを示す．これらの解析により，拡散係数が十分に大きい場合，爆発直前までは非線形項に比べて拡散項が強く働き，爆発直前での解の形状や爆発集合の位置には熱方程式の解の時間大域的挙動が現れることが見てとれる．

論文審査の結果の要旨

冪乗型非線形項をもつ藤田型方程式は、爆発という非線形現象を起こす最も単純な非線形放物型方程式の一つであり、４０年以上の長きに渡って多くの研究者の関心を集めてきた偏微分方程式である。解の爆発集合の構造と位置はその中でも重要な研究課題であるが、爆発集合の位置は、拡散効果と方程式の非線形性による微妙な均衡により決定されるため、その特徴付けを与えることは一般に困難である。

藤嶋陽平氏は、本博士論文において、タイプ１型と呼ばれる通常想定される爆発を取り扱い、拡散係数が十分に小さい、または大きい場合に対して、解の爆発集合の位置に対する熱拡散の効果及び初期値の形状との関係を明らかにした。特に、拡散係数が十分に小さい場合には、初期値の最大点の近くでのみで解が爆発することを指数型非線形項を含む広範な非線形放物型方程式に対して示した。さらに、冪乗型非線形項の場合に対して、初期値が複数の最大点をもつ場合には、最も平坦な最大点の近くでのみ解が爆発することを示した。これらは、熱方程式の詳細な解析を用いて解の短時間挙動を解析し、さらに、その解の形状に合わせて優解及び劣解を構成した後、爆発時間直前での解の形状を詳細に調べることによって為される。この詳細な解の形状解析は、藤嶋陽平氏の非線形放物型方程式に対する高度な解析能力を示すものである。また、このような爆発集合と初期値の形状に関する詳細な結果は過去になく、爆発集合の研究において重要かつ画期的な結果であると言える。また、拡散係数が小さいとは限らない場合であっても、解の爆発時間の直前を初期時刻と取り直すことにより、拡散係数が十分に小さい場合の非線形放物型方程式に帰着できるため、藤嶋陽平氏の研究は今後重要性が増すことが期待できる。実際、この研究成果は空間無限大で減衰しない初期値の場合の拡散係数が十分に大きい藤田方程式の解の爆発集合の位置の特徴付けに応用でき、藤嶋氏は熱方程式の解の最大点の時間大域的挙動と爆発集合の関係を明らかにする結果も与えている。

これらの研究を行うには、熱方程式に代表される拡散方程式に対しての深い洞察と非線形放物型方程式に関する高度な考察が必要であり、本博士論文は藤嶋陽平氏が自立して研究活動を行うに必要な高度の研究能力と学識を有することを示している。したがって、藤嶋陽平氏提出の博士論文は、博士（理学）の学位論文として合格と認める。