氏名・(本籍)	牛越 恵理佳（うしこし えりか）
学位の種類	博　士（理　学）
学位記番号	理博第 2 7 3 2 号
学位授与年月日	平成25年 3 月27日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当
研究科，専攻	東北大学大学院理学研究科（博士課程）数学専攻
学位論文題目	Hadamard variational formula for the Green function of the Stokes equations （ストークス方程式のグリーン函数に対するアダマール変分公式について）
論文審査委員	（主査）准教授 中 村 　誠 教 授 小 川 卓 克 教 授 高 木 　泉 教 授 小 薗 英 雄（早稲田大学）

論 文 目 次

論 文 内 容 要 旨

本論文では，特に流体力学の基礎方程式である Stokes 方程式に対する Hadamard 変分公式の導出方法に関しての考察を行う．Hadamard 変分公式とは，領域に摂動を施した時，領域に依存して決まる函数，例えば Green 函数や固有函数等が，どのように変化をするのかを表現したものである．1908年に Hadamard によって提唱されたこの変分公式は，単調な領域摂動における Dirichlet 境界条件を課した Laplace 方程式の Green 函数の変化を表したものであった．そして後に，Garabedian-Schiffer(1952-53) によって，一般の正則な摂動に対する変分公式が導出された．さらに，20年の歳月を経て，その一般化，すなわち高階単独の楕円型方程式に対する変分公式が，Fujiwara-S.Ozawa(1978) によって導き出された．そこで本論文では，楕円型方程式の発展の歴史を鑑みて，次の段階として楕円型方程式系，その中でも特に，変分的定式化ができ，かつ定数係数で扱いやすいという理由から，Stokes 方程式に対する Hadamard 変分公式の導出を試みた．Stokes 方程式とは，流体力学の基礎方程式である Navier-Stokes 方程式の線形化方程式で，遅い非圧縮粘性流体の運動を記述した，速度場と圧力の方程式である．

以下では，本論文における Stokes 方程式の変分公式の導出方法についての概略を述べる．

Stokes 方程式の変分公式を考察する上で，まず初めに留意しなければならないことは，同方程式特有の非圧縮条件の取り扱いである．なぜならば，一般の正則な摂動に対して，非圧縮条件は保存しないからである．そこで本論文では，体積を保存する微分同相写像を用いて領域に摂動を与えることにより問題を克服した．これは，時間依存する領域上で Navier-Stokes 方程式の可解性について言及した Inoue-Wakimoto (1977) によって提唱された手法である．このような体積一定の摂動条件のもと Stokes 方程式の変分公式の導出を試みる．Hadamard 変分公式を導出する上で，本質的な問題は二つある．まず一つ目は，変分公式の具体的な表現を求めることである．その際，Stokes 方程式に対しても Laplace 方程式同様に，Green の積分公式が重要な役割を果たす．そしてもう一つは，Green 函数の領域依存性を明らかにすることである．具体的には，変分公式を導出する上で，摂動を施した領域上の Green 函数が，摂動を表すパラメータに対する微分可能性を保証する必要がある．これに対し本論文では，Green の積分公式と，Green 函数を近似したパラメトリクスを巧みに用いて，Green 函数の領域依存性を考察した Garabedian-Schiffer(1952-53) の手法を応用することを考えた．ここで，Green 函数の領域依存性の解析には，パラメトリクスの構成が鍵を握る．Laplace 方程式の場合，基本解に切り落とし函数を乗じることでパラメトリクスを構成することができた．しかし先述のとおり，Stokes 方程式には非圧縮条件があるため，Laplace 方程式における構成方法をそのまま適用することができない．従って，境界条件を満たしかつ非圧縮条件を保存するようなパラメトリクスを構成する，という大変複雑な技術的問題の克服を余儀なくされた．この難題に対して本論文では，非圧縮条件を回復させるため，発散方程式を用いて適切な補正項を導入することで，Stokes 方程式におけるパラメトリクスの構成に成功した．これら種々の技巧を駆使することで，Stokes 方程式の特に速度場の Green 函数に対する変分公式を得た．この研究成果は，学術雑誌 Archive for Rational Mechanics and Analysis に掲載予定である．

次に，Stokes 方程式の圧力および高次変分公式の導出を考える．この問題に対しては，前述の速度場の変分公式の導出方法において，Green 函数の領域依存性の解析をより洗練することが本質的である．そこで，Fujiwara-S.Ozawa (1978) において用いられた Schauder 型のアプリオリ評価のみをもちいて，Green 函数の領域依存性を解析した手法を Stokes 方程式に適用することを試みる．なぜならば，圧力に対する変分公式を導出するためには，速度場の第一変分および，圧力の第一変分が満たすべき恒等式を導出することが有効であると考えたからである．Fujiwara.-S.Ozawa (1978) は，まず最初に Green 函数の領域の摂動を表すパラメータに対する微分可能性を，アプリオリ評価のみで証明した．その次に，Green の積分公式と Whitney の拡張定理を用いてその変分公式を導いた．この手法は，Green の積分公式とパラメトリクスを用いて，Green 函数の領域依存性と，その表現を同時進行に示した Garabedian-Schiffer (1952-53) の手法とは著しく異なるものであると言える．そこで，本論文では，Fujiwara-S.Ozawa (1978) の手法を基礎に，Solonnikov (1966) で得られた Stokes 方程式に対するアプリオリ評価を用いて，速度場の第一変分および圧力の第一変分の存在を保証することを試み，それに成功した．しかしながら，それらの具体的な表現を得る際，Stokes 方程式には非圧縮条件が障害となり，Whitney の拡張定理を用いることはできず，この点においては彼らの手法をそのまま適用することは困難である．このような状況下で，Garabedian-Schiffer (1952-53) や，Fujiwara-S.Ozawa (1978) とも異なる手法を確立する必要に迫られた．そこで，摂動領域を固定領域に変換する微分同相写像を用いて，方程式を摂動を表すパラメータに依存する変数係数を持つ微分方程式に書き換え，この方程式を形式的にパラメータで微分することで，速度場および圧力の第一変分に対する函数等式を導くことができることに着目した．なぜならば，この函数等式を導くことにより，あとは楕円型方程式の一般論と Green の積分公式を用いて，直ちにこれらの第一変分が積分表示できると考えたからである．実際に，この着想の正当化に成功し，所望の変分公式を得るに至った．更に，この証明方法を帰納的に実行することにより，速度場および圧力の第二次変分に対する表現公式を得ることが出来た．

論文審査の結果の要旨

牛越恵理佳氏は，本論文において流体力学の基礎方程式である非圧縮性粘性流体の運動方程式であるストークス方程式の境界値問題に対するアダマール変分公式を導出した．アダマール変分公式は，ラプラス方程式に対して1950年代前半の関数論の手法を用いたシッファー-スペンサー (Schiffer-Spencer)，あるいはガーベディアン (Garbedian) 等の研究に始まり，1980年代に藤原大輔，小澤真，青本和彦らによる関数解析学的手法で研究が発展し，高階単独自己共役型楕円型作用素に対してアダマール変分公式が導出された。牛越氏は，流体力学の基礎方程式であるストークス方程式に対して体積が保存される領域摂動の条件下でアダマール変分公式を確立した．牛越氏はその方法として，パラメトリクスを構成する手法と，楕円型方程式系の解のアプリオリ評価式を用いる方法の二つの証明方法を開発した。前者の方法は，グリーン関数を全空間の基本解を切り落とし関数によって近似するパラメトリクスを用いて計算するものであるが，ソレノイダルベクトル場の構成にボゴフスキー (Bogovskii) の発散公式を適用した巧妙な方法である．与えられた 1- パラメータによる摂動領域を，体積を保つ微分同相写像によって固定領域に写し，変数係数を有する連立方程式系を 1- パラメータの計量をもつリーマン多様体上のストークス方程式と見なす手法を適用したことは特筆に値する．後者の方法は，変換された変数係数を持つ偏微分方程式をパラメータに関して形式的に微分することによってアダマール変分公式を導出するという単純明快なアイデアである．しかしその正当化には，グリーン関数のパラメータに関する微分可能性を証明する必要があり，牛越氏はストークス方程式のシャウダー型評価を用いて，その微分可能性を明らかにした．この手法は前者に比較して簡素であるだけでなく，速度ベクトル場に加えて圧力関数のグリーン関数に対するアダマールの変分公式をも導出できるという利点がある．以上のように牛越氏は，崇高な問題意識と豊富な数学的知識，および，卓越した解析計算の技量を有する研究者のレベルにあり，その業績は自立して研究活動を行うに必要な高度の研究能力と学識を有することを示している。したがって，牛越恵理佳氏提出の博士論文は，博士（理学）の学位論文として合格と認める。