氏名・(本籍)	工藤正明（くどう まさあき）
学位の種類	博　士(理　学)
学位記番号	理博第２６６４号
学位授与年月日	平成24年３月27日
学位授与の要件	学位規則第４条第１項該当
研究科，専攻	東北大学大学院理学研究科（博士課程）数学専攻
学位論文題目	Global behavior of boundary-spike solutions to a semilinear parabolic equation related to pattern formation (パターン形成に関連するある半線形放物型方程式の境界スパイク解の大域的挙動)
論文審査委員	(主査) 教授 高木　泉 教授 石毛和弘 准教授 山田澄生

論文目次

論 文 内 容 要 旨

生物の形態形成や合金の自己組織化など，我々の身の周りの現象の中には偏微分方程式を用いて数学的に表現されるものがある．本論文では，ソボレフ臨界指数より小さい増大度をもつ冪型非線形項をもつ半線形放物型方程式の初期-境界値問題(P)の解の長時間挙動を考察する．この方程式は，ヒドラの頭部再生実験をモデル化したGierer-Meinhard系の抑制因子の拡散係数が無限大となった極限としてあらわれるものであり，生物の形態形成モデルの解の挙動を研究する上で基礎的なものである．問題(P)の解は，初期値の取り方によっては，自明な定常解に収束することもあれば，有限時間で爆発することもある．しかし，適当な初期値に対し，そのいずれの事象も起きずに，最大点の周りに分布が集中するような解でほとんど形を変化させることなく，最大点が境界に沿ってゆっくりと動くものが存在する．本論文の目標は，その動きが何によって支配されているのかを明らかにすることである．

問題(P)の定常解については，W.-M. Ni と I. Takagi による一連の研究があり，境界の(内向き法線に関する)平均曲率が最大である点のごく近くに分布が集中する解の存在が示された．領域の有限個の点の周りのきわめて狭い範囲に分布が集中する解は，スパイク解と呼ばれ，そのプロファイルは全空間でのある半線型楕円型方程式の(球対称)解をリスケールした函数によって与えられる．その後，スパイク解は盛んに研究され，領域の内部はもちろん，内部と境界の両方にスパイクを持つ(P)の定常解の存在も証明されている．

ところで，微分方程式の解の時間大域的な挙動を調べる道具の一つとして不変多様体の理論がある．本論文は，ある不変多様体の理論が土台となっている．不変多様体とは，初期値をその多様体からとると微分方程式の解もまたその多様体に留まるという性質を有するものである．一般に非線形放物型方程式の解の挙動を詳しく調べることは困難であるが，不変多様体上に制限すれば挙動を考察することが可能になりうる．約20年前，J. Carr, R. L. Pego や G. Fusco, J. K. Hale は Allen-Cahn 方程式と呼ばれる半線形放物型方程式について空間次元が1の場合を研究し，特別な構造(遷移層と呼ばれる函数が急激に変化する層)を持つ函数からなる不変多様体を構成し，その多様体上を解がほとんど形を変えずにゆっくりと動くことを証明した．彼らの手法は，定常解を平行移動して得られる函数の集まりを不変多様体の第0次近似とし，近似の精度を上げ，真の不変多様体を構成するというものである．この方面の研究はその後も活発になされてきたが，空間次元が2以上になると界面構造が複雑になるため，数学的に厳密な結果は少ない状況にあった．

2008年に P. W. Bates, K. Lu 及び C. Zeng は(定常解のプロファイルを与える)全域解をリスケールした函数をもとに，境界上にスパイクを1つ持つ函数からなる問題(P)の法双曲的不変多様体を構成した．不変多様体なので，境界にスパイクを持つ函数を初期値として取ると，解はその形を保ったまま境界に沿って動く．ここで，スパイク解はある1点に分布が集中している解なので，その集中している場所すなわちスパイクの位置を考察することが解の挙動を考察することになる．また，法双曲的とは法空間で見たときに双曲型になっているということであり，多様体上の任意の点において，接ベクトル空間と直交する空間が安定方向と不安定方向に分解できることを言う．一般に，Bates らの捉えた不変多様体の近くに初期値を取ると，不安定方向が1次元分あるために解は多様体から離れていくが，不安定方向の成分を含んでいなければ不変多様体に漸近する．また，彼らは構成した不変多様体上での解の挙動を調べ，スパイクがおおよそ平均曲率の勾配流に沿って境界上を動くことを証明した．しかし，平均曲率函数の臨界点近傍での解の挙動は，彼らの結果だけからは理解することができない．そこで本論文では，スパイクの運動方程式の漸近展開を計算する方法を確立し，空間次元が2と3の場合に，平均曲率函数の臨界点近傍でのスパイク

解の動きを支配するものを明確にした.

以下, 本論文の構成及び各章の概略を述べる. 本論文は4章からなり, 第1章では, 研究の背景について述べる.

第2章では, 空間次元が2の場合にスパイクの運動方程式の漸近展開を求める. Batesらにより方程式の拡散係数εについて冪級数展開したときの3次の項の係数が(平均)曲率函数の接方向微分となることが証明されていたが, 彼らとは別の方法によりεの5次の項の係数までを厳密に求めた. この結果から曲率函数の臨界点近傍では, 接方向への3階微分が支配的であることが分かる. すなわち, 曲率函数の極値ではないような臨界点では, スパイクは止まらずに曲率を大きくする方向に動くことが分かる. これまで, 曲率函数の退化臨界点近傍でのスパイク解の挙動(および定常解の存在)について議論した結果はなかったが, 我々の結果は曲率函数の退化臨界点にも適用でき, より精密に解の挙動を知ることができる. εの4次の項の係数は, 曲率と曲率函数の接方向微分の積の形であり, 曲率函数の臨界点において0となるために, 有益な情報を得るためには5次以上の項まで求める必要があった. 我々の方法は以下の通りである. 不変多様体上の任意の点(函数)は全域解を境界上の点pに分布が集中するようにリスケールした函数とそれが斉次Neumann境界条件を満たすための補正函数h, 真の不変多様体となるための函数ϕとの和で表現される. このことから, 点pはスパイクの位置に対応することが従い, スパイクの運動を理解するためには, このpを調べればよいことが分かる. 時刻tにおけるスパイクの位置を表す点pは領域の境界上にあるので, その速度はある接ベクトル空間の元τを用いて表現される. したがって, ベクトル場τを考察することが, スパイクの挙動を考察することに他ならない. ここで, 函数hやϕは 点pから離れたところでは指数的に減衰しているため, 主要部はpの近傍の情報によって決まることに注意する. そこで, J. Weiによって定常解を構成する際に導入された領域の境界の一部を平坦にする微分同相写像を用い, 点pの近傍で方程式を新しい座標系を用いて書き換える. まず補正函数hの満たす微分方程式を先の微分同相写像により上半空間での微分方程式に書き換え, 函数hが形式的にεの冪級数として展開できると仮定し, εの冪ごとに項をまとめ, それぞれの項ごとに微分方程式を導出する. その方程式の(上半空間で定義された)解を用いて係数を定め, 誤差項の評価を厳密に行うことにより, 展開を正当化する. 次に, ϕとτをεで展開する. 函数ϕとベクトル場τが満たす方程式を補正函数hのときと同様に形式的にεで展開し, εの冪ごとに微分方程式を導出する. さらに, 偶函数, 奇函数の部分に分け, 各ステップにおいて, 方程式の可解性およびある直交条件を用いて, 順次εで冪級数展開したときの係数を決める. 最後に, 誤差項の評価を行い, 展開を正当化する. 係数が境界上の点pから離れたところでは, 2階の導函数までこめて指数的に減衰していることおよび偶函数と奇函数に分けることが証明の鍵を握る. また, 関連する先行結果では議論されてこなかった微分同相写像の微分についても言及し, 展開が正しいことを裏付ける.

第3章では, 空間次元が3の場合に第2章と同じ手法を用いて, スパイクの運動方程式の漸近展開を求める. εの4次の項まで厳密に計算することにより, 平均曲率函数の臨界点近傍においては, ガウス曲率の勾配が支配的であることが分かる. より正確には, 平均曲率函数の臨界点(のごく近く)で最大値をとる函数を初期値としてとると, ガウス曲率を小さくする方向にスパイクが動くことが分かる. εの4次の項で2次元のときとの違いが現れるが, これは曲面には主方向が2つあるためである. また, 煩雑な式から境界の幾何学的な情報を取り出すために, 項をまとめる必要があるが, これは高次元特有のものである.

第4章では, 第2, 3章で得た主定理の応用例を提示し, 問題(P)とGierer-Meinhardt系の関係を述べ, 定常解のエネルギーの漸近展開についての先行結果と比較する.

論文審査の結果の要旨

熱伝導方程式に線型の減衰項と冪型非線型生産項を加えた半線型放物型偏微分方程式の解は，初期値によって，有限時間で爆発することもあれば，定常解に収束することもある．本博士論文は，ユークリッド空間の有界領域において，この方程式に斉次 Neumann 境界条件を課した初期－境界値問題の解の長時間挙動に関するものである．近年，拡散係数が非常に小さい場合，境界上の一点の周りにのみ分布が集中するような函数からなる不変多様体が存在することが Bates, Lu および Zeng により証明された．このような解をスパイク解と呼び，その空間方向の最大点をピークと呼ぶことにする．彼らは，さらに，その不変多様体上を動くスパイク解のピークの運動を記述する常微分方程式を導き，その主要部は，境界の平均曲率の勾配流となることを明らかにした．

本学位論文は，平均曲率函数の臨界点の近傍での解の振舞いを解明することを目的とし，その解析に必要な漸近展開の導出法を与えたものである．Bates 等は，ピークの運動を記述する，領域の境界上で定義された常微分方程式（境界上の接ベクトル場）を拡散係数の平方根の冪で展開し，主要項が平均曲率函数の勾配に等しいことを示した．第二項以降を求めるためには，より精密かつ複雑な計算が要求される．それは，小さなパラメータ（拡散係数の平方根）の冪で展開し，各係数が満たす線型楕円型境界値問題を解くことに帰着し，求める接ベクトル場を決定する係数を，Fredholm の交代定理による可解条件を満たすように選ぶという標準的なものである．本論文の最大の貢献は，実は，そこにもう一つの直交条件があり，高次の項を求めるには，可解条件と直交条件を同時に満たすように係数を決めて行く必要があることを発見し，ピークの運動方程式の漸近展開の係数を求めるためのアルゴリズムを確立したことにある．さらに，それを二次元および三次元領域に適用し，それぞれ，第三項，第二項まで係数を正確に求めている．

以上のように，本論文は，非常に高い独創性を有し，著者が自立して研究活動を行うに必要な高度の研究能力と学識を有することを示している．したがって工藤正明提出の博士論文は，博士（理学）の学位論文として合格と認める．