氏名・(本籍)	物部治徳（もの べ はる のり）
学位の種類	博士(理学)
学位記番号	理博第2646号
学位授与年月日	平成23年9月8日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
研究科，専攻	東北大学大学院理学研究科（博士課程）数学専攻
学位論文題目	Behavior of solutions for a free boundary problem related to amoeba motion (アメーバ運動に関連する自由境界問題の解の挙動)
論文審査委員	(主査) 教授 石毛和弘 教授 高木泉 教授 柳田英二（東京工業大学）

論文目次

論 文 内 容 要 旨

本博士論文では，神戸大学の梅田民樹氏により提唱されたアメーバ運動に関連する数理モデル（以後，問題（P）と書く）を扱い，古典解の存在と挙動について考察する．梅田氏は特にアクチンと呼ばれる蛋白質に着目し，単量体と重合体の間で行われる重合（脱重合）反応や，重合体同士における張力のバランスを考慮した細胞運動モデルを提唱した．このモデルは非線形放物型偏微分方程式についての自由境界問題として定式化され，その特徴は状態変数の境界値が領域の境界の曲率に依存し，境界の法線速度が非局所項（積分）によって決まることである．この数理モデルについては，数値シミュレーションによって興味深い性質が導かれているが，数学的な解析はまったく行われていなかった．従って，この数理モデルの構造を解析し，現象との類似点や相違点を理論的に予想することは重要な課題となる．本博士論文では，問題（P）を考察し

[1] 領域に一般性がある場合に，古典解が時間局所的に存在すること
[2] 領域が球対称となる場合に，ある定常解の近傍に球対称解が大域的に存在して，その近傍内に留まること
[3] 領域が球対称となる場合に，ある定常解よりも小さい初期領域をとった場合， 領域が一点に縮みながら状態変数の最大値が発散する爆発解が存在すること

について考察する．

[1]では，一般の初期領域を考察対象とするため曲率の扱いが問題となる．ここでは，梅田モデルに補正を加え，粘性抵抗の効果を考慮したモデルを扱う．具体的には，状態変数の境界値が境界の曲率と法線速度，粘性抵抗に関係して定まる初期値問題の時間局所解の存在とその滑らかさについて考察する．

この問題に類似した自由境界問題として，氷と水の相転移現象を記述した一相 Stefan 問題，特に Gibbs-Thomson 効果と呼ばれる境界条件に曲率と法線速度を含む Stefan 問題（以後，問題（G.S.）と書く）がある．多次元領域における問題（G.S.）の解の存在は，E. V. Radkevich（1991）や X. Chen and F. Reitch（1992）により古典解が時間局所的に存在することが確認された．自由境界問題の多くは，領域の位相が変化する可能性があるため，古典解の存在は一般には時間局所的になる.これらの結果を考慮し，ここでは初期領域が十分な滑らかさを持てば，同等の滑らかさを持つ古典解が存在することを示す．証明は，X. Chen and F. Reitch（1992）や W. Merz and P. Rybka（2004）のアイデアに基づき，領域と領域内部の状態変数の近似解を交互に構成して Banach の不動点定理を用いるという手法による．状態変数の境界値は補正したため，曲率と法線速度に依存していることから，領域の運動は放物型方程式によって支配されるとみなされ，このことから滑らかな領域の近似解が構成できる．一方，状態変数の近似解は，時間変化する領域

をHanzawa微分同相写像（E. Hanzawa（1980）より）を用いて，固定領域の問題を解くことに帰着することで得られる．従来は，近似解を含むBanach空間は初期領域の境界と等長な多様体上で構成されるHölder空間であったが，ここでは領域内部の情報を必要とする積分項を近似するために初期領域上で構成されるHölder空間を適用する．また，縮小写像もそれに対応して，新たに構成し直す必要がある．この結果は，問題（P）のように非局所項を含む場合だけではなく，適当な非線形項を含む自由境界問題にも適用することができる．

[2]では，粘性抵抗を考慮しない場合，すなわち状態変数の境界値が曲率のみに依存する場合を考察する．特に，実際の細胞では安定な形状が円板であることを考慮して初期時刻における領域と状態変数が球対称であることを仮定し，時間大域的な古典解の存在とその挙動について調べる．

[1]で述べた局所解の近似列の構成方法は，境界条件が放物型であるために曲面の滑らかさを失わずに近似解を構成することができた．一方で，粘性抵抗がない場合には楕円型の境界条件を扱うため，時間方向に関する正則性を十分に確保できず，同様の近似解の構成方法は適用できない．そこで，境界の法線速度を決める境界条件から境界の正則性を確保した近似解を構成する．この境界条件には法線と法線速度が含まれているので，Hamilton-Jacobi方程式の形をとる．この方程式は時間方向の微分階数が1階に対して空間方向も同様に微分階数が1階のため，一般には高階の正則性を得ることが出来ないのであるが，初期値の対称性を効果的に用いることにより滑らかな近似解を構成することが可能となる．

時間大域解の存在とその挙動については，数理モデルの背景から安定と予想される球対称定常解の近傍で考察を行い，その定常解が数学的に安定と示唆される結果を与える．特に，梅田氏のシミュレーション結果から，安定な定常解の近傍では境界の速度が状態変数の密度勾配にほとんど依存していないことが予想されるため，ここでは，境界の速度が非局所項と状態変数の境界値のみに依存する場合について考察する．証明においては，ある係数の条件下で状態変数と境界に対する正不変領域を見つけることが鍵となる．この結果から，正不変領域内で初期値を取る場合は，細胞の領域は，有限時間で原点へ縮む場合と全領域へ広がる場合の二つの可能性を排除することができ，解が大域的に存在することが予想される．大域解の存在に関する証明は，境界の挙動を表す関数が 適当なHölder空間において一様有界であることを示せばよい.この問題は，方程式特有の性質と補間不等式を用いることで， 密度勾配の境界上での一様有界性に帰着できる．この一様有界性は、正の不変領域内で有効な比較関数を探し出すことによって証明される．以上の結果から，正の不変領域内で初期値をとる場合，解は大域的に存在し安定と予想され定常解の近傍で局在し続けることが示される．

[3]では，引き続き境界の速度が非局所項と状態変数の境界値のみに依存する場合について考察を行い，不安定と予想される定常解よりも初期領域が小さいとき，領域が有限時間で一点に縮む解の存在を考察する．特に，この解は，領域の消滅と同時に状態変数の最大値が無限大に発散する爆発解となる．[2]の結果と合わせると，球対称定常解は少なくとも二つあり，領域の小さい方が不安定となり，大きい方が安定となることが予想される．

論文審査の結果の要旨

本博士論文では、梅田民樹氏（神戸大学）により提唱されたアメーバ運動に関連する数理モデル（以下、梅田モデルと記す）を扱い、古典解の存在と解の挙動について考察を行っている。この梅田モデルは、単量体と重合体の間で行われる重合（脱重合）反応や、重合体同士における張力のバランスを考慮した細胞運動モデルであるが、非線形放物型偏微分方程式についての自由境界問題として定式化される。この自由境界問題は、状態変数の境界値が領域の境界の曲率に依存し、境界の法線速度が非局所項（積分）によって決まるという興味深い数学的構造を内包しているが、数学的観点からの取り組みは本学位論文が初めてである。

物部治徳氏は、本学位論文において、単純化された梅田モデルの時間局所解の存在を証明したが、これは梅田モデルのもつ自由境界問題としての数学的困難さを粘性抵抗の効果を自由境界の挙動に加えることにより克服し為された。また、物部氏は、粘性抵抗がなく自由境界の速度が非局所項と状態変数の境界値のみに依存する場合について考察し、ある球対称定常解の存在およびその定常解のある近傍内に初期関数をとる球対称解は時間大域的に存在することを示した。これは、解の挙動を決定するある量についての正不変領域を求め、それにより解の先験的評価を与えることによって為される。実際、氏は数理モデルの背景および数値シミュレーション結果に基づき、ある状態変数と境界に関する正不変領域を求め、さらに正不変領域における比較関数を構成することによって境界の挙動を表す関数が適当なヘルダー空間において一様有界であることを示し、大域的球対称解の存在を証明した。さらに、物部氏は、ある係数の条件下では大域解が存在せず、ある時刻において領域が一点に縮み解が爆発することを示した。

本学位論文で与えられた結果は、物部治徳氏が数理モデルの背景や数値シミュレーション結果から数学的に取り組むべき方向を模索することによって為されたものであり、また得られた結果は数学的観点から興味深く、また、幾つかの数学的困難さの克服のもとに為されたものである。よって、本博士論文は物部治徳氏が自立して研究活動を行うに必要な高度の研究能力と学識を有することを示している。したがって、物部治徳氏提出の博士論文は，博士（理学）の学位論文として合格と認める。