氏名・(本籍)	堀畑佳宏(ほりはた よしひろ)
学位の種類	博　士(理　学)
学位記番号	理博第2645号
学位授与年月日	平成23年9月8日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
研究科，専攻	東北大学大学院理学研究科(博士課程)数学専攻
学位論文題目	Weak subsystems of first and second order arithmetic (1階および2階算術の弱い部分体系)
論文審査委員	(主査)　教　授　田中一之 准教授　山崎　武 教　授　小薗英雄

論文目次

論 文 内 容 要 旨

本博士論文では主に次の二つの研究について報告する.
・文字列の結合に関する公理をもつ理論（concatenation の理論）と弱い 1 階算術の関係についての研究.
・2 階算術における複素解析学および数論の逆数学的研究.

ここで逆数学とは，2 階算術，つまり自然数とその集合を対象とする理論において，数学の諸定理をその証明に必要十分な公理の強さで分類する，数学基礎論の一分野である．2 階算術においてよく使われる理論は弱い順に RCA_0，$WWKL_0$，WKL_0，ACA_0，ATR_0，Π^1_1-CA_0 ある．RCA_0は，計算可能な集合の存在が示せる理論で，およそ計算機が扱うことのできる数学を展開できる．Friedman や Simpson らによって，数学の定理の多くは，RCA_0で証明できるか，あるいは上で述べた公理系のいずれかと同値になることが知られている.

Concatenationの理論と 1 階算術の研究について（本論文 3 章）

Cocatenation，つまりアルファベットや文字列の結合，に関する考察は，Quine の 1946 年の論文にその研究の先駆を見ることができる．彼の concatenation に関する考察の動機は，ゲーデルによる不完全性定理の証明の本質は算術（数を扱う能力）にあるのではなく，concatenation に関する能力（文字列を識別する能力）にあると考えられる点にある．このような背景の下に concatenation に関する理論は，Tarski による「編集者公理」と呼ばれる公理が導入され，広く研究されるようになった.

一方，2005 年には Grzegorczyk により二文字のアルファベットをもつ concatenation に関する理論 TC が導入され，数を参照することなく「再帰性」を TC 内で定められること，および TC が決定不可能であること，つまり与えられた命題が TC の定理であるかそうでないかを判定するアルゴリズムが存在しないこと，が証明された．2008 年には，Grzegorczyk と Zdanowski によって TC の本質的決定不可能性，つまり TC

の無矛盾な拡大理論は全て決定不可能であることが証明された．さらに2009年には，Visser，Svejdar，Ganeaがそれぞれ独立に，TCと1階算術Q（ペアノ算術PAから帰納法を抜いたもの）が互いに翻訳可能であることを証明した．この結果により，concatenationの理論と算術の理論が論理的に密接な関係があることが知られるようになった．

本研究で着目したのは，Tarskiらによって導入された1階算術Rである．RはQに対し非常に弱いが，本質的決定不可能（したがって不完全性定理を導く）ことがTarskiらによって示されている．
さらにこの理論は，「本質的決定不可能な算術で最弱な体系はどのようなものか？」という観点で非常に興味をもたれていて，実際，JonesとShepherdsonによってRが，本質的決定不可能な理論として極小であること，つまり，Rの公理のどれか1つを外すと本質的決定不可能でなくなることが示されている．

本研究では，上記算術Rに対応するような，concatenationに関する新しい理論WTCを構築した．まず，この体系が，Σ_1完全であること，すなわち，任意のΣ_1論理式に対し，それが真ならばWTCで証明可能であることを証明した．そして，WTCがRと互いに翻訳可能であることを証明した．ここで理論TがSに翻訳可能であるとは，理論Tの言語をSの言語に書き換える手続き（写像）があり，Tの公理を書き換えたものがSで全て証明できることをいう．翻訳関係は本質的決定不可能性を保存することから，WTCが本質的決定不可能であること，したがって不完全性定理を導くことが証明された．

一方，翻訳関係は，言語が異なる理論に対しても理論としての論理的強さの比較が可能である点においても重要な概念である．ところが，「ある理論が他の理論に翻訳可能でない」ということを示すための統一的な手法はほとんど知られていない．しかし本研究では上で述べたRとの翻訳を構成する手法を一般化することにより，WTCの翻訳の強さに対し次のような特徴づけを与えることができた．

・WTCがTを翻訳できる為の必要十分条件はTが局所的有限充足可能であることである．

ここで，Tが局所的有限充足可能であるとは，Tの有限部分理論が有限モデルをもつことをいう．この翻訳可能であるための必要十分条件は，WTCの理論としての論理的特徴を十分に表現していると考えられる．この結果の系として， WTCはTCを翻訳できない，したがってWTCは翻訳の意味においてTCよりも真に弱いことが示された．

複素解析学の逆数学的研究（本論文4, 5, 6章）
2階算術における実解析の研究は古くからなされてきたが，2階算術における複素解析学の研究は近年，齋藤晃や横山啓太によって始められた．齋藤は代数学の基本定理を2階算術において扱うためにその証明のための複素解析学の基礎理論を2階算術において整備した．一方，2階算術の基本理論RCA_0において導関数を扱うことが困難であることが知られていた．これに対し横山は，元の関数と導関数，およびこれらをつなぐある連続関数（condition functionと呼ばれる）の三つ組みで扱うことにより，RCA_0において導関数を統一的に扱うことを可能とした．このことを契機に，2階算術における複素解析学の研究が活発化した．特に横山はコーシーの積分定理がWKL_0と同値になることを証明した．

本研究では，複素解析学における特異点に着目した．まず有理型関数のLaurent展開がWKL_0で行えるこ

とを示した．ここで WKL_0 は RCA_0 よりも強い理論であるが，Friedman の定理によりこの理論の無矛盾性は，それよりも弱い理論である，Hilbert の有限の立場の形式化と言われている理論 PRA の無矛盾性と等価であることが知られている．すなわち，PRA が無矛盾ならば WKL_0 も無矛盾である．したがって WKL_0 は，無矛盾性の意味において「安全な」理論と考えられており，そこでどれくらいの数学が展開できるかの研究も，本研究の目的のひとつである．

次に，特異点に関する重要な定理である Casorati と Weierstrass の定理が $WWKL_0$ で証明できることを示した．$WWKL_0$ は RCA_0 よりも強いが WKL_0 よりも弱い理論で，WKL_0 では連続関数の可積分性が証明できる一方，$WWKL_0$ では一般に，有界な連続関数の可積分性までしか証明できない．しかしながら複素解析学の基本的な定理のいくつかを証明するには $WWKL_0$ で十分であることが，本研究によって分かってきた．
実際，同様の手法により，Liouville の定理，Schwarz の鏡像原理が $WWKL_0$ で証明できることを示した．
さらに，留数定理が WKL_0 と同値になるという逆数学的結果を得た．また，一致の定理に対し一般形は WKL_0 で証明できる一方，「正則関数は Taylor 展開可能である」（TEXP と呼ぶ）という仮定の元では RCA_0 で証明できることを示した．本研究で導入した主張 TEXP は WKL_0 で示せるが，逆は難しいと考えられる．この主張 TEXP は RCA_0 と WKL_0 の間に入ることが予想されている．

次に，Liouville の定理の精密化である Picard の小定理，Casorati / Weierstrass の定理の精密化である Picard の大定理に着目し，(i)モジュラー関数と持ち上げ補題を用いる証明と，(ii) Schottky の定理による証明の双方を分析した．

(i) モジュラー関数の構成には Riemann の写像定理が用いられる．Picard の定理の証明のためには簡単な形の領域に対する Riemann の写像定理で十分である．そこで本研究において，Riemann の写像定理の分類に関する次の結果を得た．ここで多角形的領域とは，境界が有限個の直線や円弧のみで成る領域のことをいう．

- 多角形的領域に対する Riemann の写像定理（WRMT と呼ぶ）は RCA_0 で証明できる．
- Jordan 曲線の内部に対する Riemann の写像定理は WKL_0 と同値になる．

横山により単連結領域に対する Riemann の写像定理は ACA_0 と同値になることが知られているので，本研究の結果とあわせ，Riemann の写像定理の論理的分類が行われたことになる．
Picard の小定理の証明には多角形的領域に対する Riemann の写像定理（WRMT）が使えるが，複素数平面から二点 0,1 を除いたものの被覆空間を作るためには，WRMT で得られた等角写像をその境界まで連続拡張する必要があるが，これが RCA_0 で行えるかは非常に難しい問題で，未解決問題として記載した．
ここで得られた Picard の小定理にたいする結果は，WKL_0 と WRMT で得られた等角写像が境界まで連続拡張可能という仮定の元で，Picard の小定理が証明できる．その研究の過程で次の逆数学的結果を得た．
単連結領域上の連続関数の持ち上げの存在補題が，WKL_0 と同値になることが証明できた．

(ii) 上記困難を回避するために，Schottky と Landau による Picard の定理の別証明の逆数学的分析を行った．そこで得られた結果として，Bloch の定理および Schottky の定理は WKL_0 で証明することができ，その結果として Picard の小定理，さらに Picard の大定理を WKL_0 で証明できることが示せた．
したがって，モジュラー関数を用いた証明の場合よりも弱い仮定で Picard の定理を示すことができた．

論文審査の結果の要旨

本博士論文は，算術の形式体系に関する数理論理学的研究であり，数学基礎論に対する顕著な貢献とみなせる．その内容は，弱い 1 階算術と文字列結合の理論（concatenation の理論）を比較する研究と，2 階算術において複素解析学を展開する逆数学的研究に分けられる．

本論文の第 1 章と第 2 章では研究の背景や基本概念が説明され，第 3 章において，Concatenation の理論と 1 階算術の関係が考察される．本論文では，Tarski らが導入した 1 階算術 R に対応する，concatenation の新しい理論 WTC を構築して，それらが互いに翻訳可能であることを証明している．さらに WTC の翻訳の強さに対し，次のような特徴づけを与えている：理論 T が WTC に翻訳されるための必要十分条件は，T が局所的有限充足可能であることである．このように翻訳可能性をうまく特徴付けた結果は，これまでほとんど例がなく，その独創性は高く評価できる．

続いて，第 4 ～ 6 章では，複素解析学の逆数学的研究を行う．逆数学とは，2 階算術，つまり自然数とその集合を対象とする理論において，数学の諸定理をその証明に必要十分な公理の強さで分類する研究プログラムである．本論文の第 4 章は，複素解析学に対する従来の逆数学的研究の成果を整理するとともに，留数定理など未着手だった部分もきちんと調べて埋めている．第 5 章では，Riemann の写像定理 (RMT) に対する横山の結果を精密化し，多角形的領域に対する RMT は RCAo で証明できること，Jordan 曲線の内部に対する RMT は WKLo と同値になることなどを示した．第 6 章は本論文の中心となる部分で，Picard の小定理と大定理を二つの方法で証明する．一つは RMT を使い，もう一つは Schottky と Landau の方法による．ここで，後者の証明は WKLo で実行されるのに対し，前者の議論は WKLo 内に完全に収まっていない．しかし，前者はより弱い理論で実行できる見通しもあり，そしてまた周辺に興味深い問題が数多く見つかっている．この辺はすでにかなりボリュームのある仕事になっているが，将来の発展もさらに期待される．

最後に第 7 章は付録となっていて，整数環や位相に対する逆数学的研究の中間報告と，とくに重要な未解決問題をリストアップしている．

以上の結果は，堀畑佳宏が自立して研究活動を行うに必要な高度の研究能力と学識を有することを示している．したがって，堀畑佳宏提出の博士論文は，博士（理学）の学位論文として合格と認める．