氏名・(本籍)	澤田宰一 (さわ だ ただ かず)
学位の種類	博士(理学)
学位記番号	理博第2599号
学位授与年月日	平成23年3月25日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
研究科，専攻	東北大学大学院理学研究科（博士課程）数学専攻
学位論文題目	Splitting of arithmetically Cohen-Macaulay bundles and Frobenius sandwiches (算術的コーエン・マコーレー束とフロベニウス・サンドイッチの分裂)
論文審査委員	(主査) 准教授 原 伸生 教授 石田正典, 花村昌樹

論文目次

論 文 内 容 要 旨

This dissertation deals with some results concerning splitting of arithmetically Cohen-Macaulay bundles and Frobenius sandwiches. Here we use the terminology "splitting" in double meanings. For arithmetically Cohen-Macaulay bundles, it means the splitting of a vector bundle into a direct sum of line bundles. On the other hand, for Frobenius sandwiches, it means the splitting of a Frobenius morphism. In spite of such subtle difference, both "splitting" are loosely related to each other in terms of the structure of maximal Cohen-Macaulay modules.

In Chapter 1, we study splitting of arithmetically Cohen-Macaulay bundles on hypersurfaces. For vector bundles on a projective space P^n, Horrocks has established the following criterion: A vector bundle on P^n splits if and only if its intermediate cohomology groups vanish. This result characterizes splitting of vector bundles on P^n via cohomological conditions. Horrocks' criterion does not extend to hypersurfaces in general, and these cohomological conditions are used to define arithmetically Cohen-Macaulay bundles on hypersurfaces. We give a sufficient condition for splitting of arithmetically Cohen-Macaulay bundles of rank r on general hypersurfaces of degree d in P^n as an inequality with respect to r, d, n. In particular, we see that if the dimension n of a general hypersurface X of degree d is sufficiently larger than the degree d and r, then all arithmetically Cohen-Macaulay bundles of rank r on X split.

In Chapter 2, we study splitting of Frobenius sandwiches. Let X be a smooth variety over a field of positive characteristic. A Frobenius sandwich, or F-sandwich for short, of X is a normal variety through which the relative Frobenius morphism of X factors. It is natural to ask what kinds of singularities and varieties appear as Frobenius sandwiches of X. However, it seems hopeless to classify the Frobenius sandwiches explicitly without any restriction to those under consideration because of pathological phenomena in positive characteristic. In this dissertation, we consider Frobenius sandwiches that behave better in the sense of Frobenius splitting, that is, strongly F-regular singularities and globally F-regular varieties. Assuming these local or global F-regularity, we expect to exclude pathological cases, so that we may hope for systematic study of them.

First, we consider a characterization of strongly F-regular Frobenius sandwich singularities. In Section 2.3, we see that a strongly F-regular F-sandwich singularity of exponent one is always a toric singularity, which is essentially proved by Aramova. We give a proof of this result in comprehensive way. Second, we consider the global case. In Section 2.4, we give classifications of globally F-regular F-sandwiches of the projective plane P^2 and Hirzebruch surfaces Σ_d of exponent one. In particular, we see that globally F-regular F-sandwiches of P^2 and Σ_d of exponent one are toric surfaces.

In Chapter 3, we consider F-blowups of certain surface singularities. Yasuda introduced the notion of the e-th F-blowup as a universal flattening of the e-th iterated relative Frobenius morphism. Although the study of it has just started and there remain many mysteries in its behavior, the F-blowup seems to be a very interesting object as a birational modification in positive characteristic. We ask if an F-blowup of a surface singularity coincides with the minimal resolution of it. In Section 3.2, we see that the answer is affirmative for (two-dimensional) F-regular double points. On the other hand, in Section 3.3, we give a counterexample to the question constructed as a non-F-regular F-sandwich surface singularity.

論文審査の結果の要旨

本博士論文は，射影多様体上の算術的コーエン・マコーレー束とよばれるベクトル束と，正標数の代数多様体上のフロベニウス射に関する分裂性を考察して得られた代数幾何学における結果をまとめたものであり，研究テーマ毎に三つの章から構成されている．

第１章においては，射影空間内の超曲面上の算術的コーエン・マコーレー束 (以下ACM束と略) が分裂するための十分条件が考察されている．中間次コホモロジーがすべて消滅するような射影多様体上のベクトル束をACM束とよぶ．射影空間上でのACM性は，ベクトル束が直線束の直和に分裂することと同値であるが，一般の射影多様体上ではベクトル束の分裂とACM性は同値でない． 本章では，n次元射影空間内の次数dの一般の超曲面上の階数rのACM束が分裂するための十分条件を，n,d,rの不等式を用いて与えた．この結果は大雑把に言えば，次元nが次数dと階数rに対して十分大きいならACM束は分裂するということを意味しており，十分高い次元の射影空間上の任意のベクトル束は分裂するというHartshorne予想とも関連した興味深い結果である．

第２, ３章の主題は，正標数の代数多様体に特有の射であるフロベニウス射とその分裂である．

非特異多様体Xのフロベニウス射がF:X→Y→Xと経由する正規多様体YをXのフロベニウス・サンドイッチ(またはF-サンドイッチ)とよぶが，第２章では，フロベニウス射の分裂に関してF-正則性という『良い』性質をもつF-サンドイッチの分類問題が考察されている．第２章の主結果は，典型的なトーリック曲面である射影平面とヒルツェブルフ曲面のF-サンドイッチとして現れる大域的F-正則曲面の分類である．分類の結果として現れるもトーリック曲面となり，その有限個の同型類は，扇に関するトーリック幾何の言葉で完全に記述される．この分類における具体的な計算には澤田の独創と力量が十分に発揮されている．

第３章では，正標数の曲面特異点のF-爆発が考察されている．F-爆発はフロベニウス射の平坦化として定まる正標数の代数多様体に特有の双有理変換であるが，これを定義した安田健彦氏は，曲面のF-爆発は最小特異点解消か？ という問を提出した．本章では，この問に対するF-サンドイッチ特異点の反例と，F-正則２重点における肯定的な結果の二つを与えた．これは，原との共著に基づく結果であるが，そこでは触れられていない詳細な解析や精密化も本章に収録されている．

以上，本博士論文には，代数幾何学，とくにベクトル束の代数的な性質と正標数の幾何における多くの新しい結果と知見が認められ，博士論文として十分な学術的意義を有する．その優れた内容は，澤田が自立して研究活動を行うに必要な高度の研究能力と学識を有することを示している．したがって，澤田宰一提出の本博士論文は，博士(理学)の学位論文として合格と認める．