氏名・(本籍)	半沢英一（はんざわ えいいち）
学位の種類	理学博士
学位記番号	理博第 694 号
学位授与年月日	昭年 56 年 2 月 25 日
学位授与の要件	学位規則第 5 条第 1 項該当
研究科専攻	東北大学大学院理学研究科 （博士課程）数学専攻
学位論文題目	Classical solutions of the Stefan problem (ステファン問題の古典解)
論文審査委員	（主査） 教授 小竹　武　　教授 吉沢太郎 教授 加藤順二

論 文 内 容 要 旨

本論文の目的は，多次元一相ステファン問題の初期値問題が十分短い時間内においては古典的な意味での解をもつことを証明することである。ステファン問題は氷の融解の数学的モデルであり，したがって本論文の数理物理的内容は，氷の融解を記述する微分方程式が超関数としての意味だけでない通常の意味での解をもつことを確認したことである。証明はいわゆるナッシュの陰関数定理を使用することに依る。

ステファン問題は一つの典型的な自由境界問題であり，ステファン（1889）によって以下のように設定された：(1)氷は水（あるいは他の媒体）と接触しており，氷の温度は0とする。（氷の温度変化まで考えるのが二相問題であり，これは本論文ではあつかわれない。）(2)未知要素は氷の形状と水温の変化である，そしてこれらの初期値と水の他の境界からの熱の供与がデータとして与えられている。(3)水温uは拡散方程式 $(\partial_t - \Delta)\,u = 0$ に従う。(4)氷の表面は，その各点において，その点における水温の法線方向勾配に比例した速度で融けていく。

上記(4)がいわゆるステファンの法則で，水温がそれまでの氷の形状の変化に依存することを考えると，この法則が問題に強い非線型性を与えていることがわかる。

一次元の場合は上記問題についてかなりの量の文献があり，初期値問題については古典解を一意的に無限時間までもつことがルビンシュタイン（1947）によって証明されている。これについてはキャノン（1967－1971）等によって精密化がなされている。

多次元の場合，氷は融けていくと一般に有限時間でちぎれてしまうので初期値問題について古典解の無限時間までの存在定理は期待できない。古典解の一般的な存在定理として目標とすべきものは十分短い時間内でのそれである。これは本論文でナッシュの陰関数定理を用いて確認されたがそのことにふれる前に多次元ステファン問題のこれまでの研究を簡単に述べておく。

多次元ステファン問題に弱解（＝超関数解）の概念を導入したのはカメノモスツカヤ（1958）で，彼女は弱解が一意的に無限時間まで存在することを証明した。彼女の研究はオレイニク（1960）やフリードマン（1968）等によって継承された。その後一相ステファン問題を変分不等式として定式化する手法がデュボー（1973）によって創始され，その系統でフリードマン，カファレルリ，キンダーレウラー，ニーレンベルグ（1975－1979）等の深い研究がなされた。ただ，彼らの一つの目標は，物理的に当然そうと期待される場合には弱解が古典解となっていることを示すことにあったと思われるが，この点では部分的な成功しかおさめられなかったようである。一例を挙げれば，本論文の定理は彼らの研究ではえられていない。

ナッシュの陰関数定理について説明する。通常の陰関数定理とは，n次元ユークリッド空間の領域から同空間へのなめらかな写像がある一点で0でないヤコビ行列式をもつならば，同じことだがその点での線型化方程式が一般に解けるならば，その写像はその点において局所的逆

写像をもつという事であった。証明はピカール式の逐次近似を行ってえられる。この定理はたやすくバナッハ空間に拡張されて多くの非線型微分方程式の解の存在がそれによって証明される。陰関数定理によれば非線型微分方程式の解の存在をいうにはその線型化方程式の可解性をいえばよいわけである。ただし，ピカール近似を遂行するために，線型化方程式の解はデータに対してもとの方程式の階数と同じだけ微分可能性の上がったものとして求まるとする。このただし書きが成立しない場合，これを微分可能性の損失が生じたというが，ピカール近似は有限回で無意味となる。さて具体的な問題でこのような微分可能性の損失が生じた場合でもなんとか陰関数定理のような命題が成立しないだろうか？この問いに肯定的な答を与えたのがナッシュ（1956）の陰関数定理で，彼はリーマン多様体をユーリリッド空間に埋蔵するという問題において微分可能性の損失が生じている場合でもある種の条件が充たされれば線型化方程式の可解性からもとの非線型方程式の解の存在がえられることを証明した。

ナッシュの陰関数定理の証明のアイディアをモーザー（1961）に依って説明する。逐次近似を無意味とさせないため近似の一回ごとに軟化子を作用させることを考える。すると近似が無意味とならないかわりに評価が悪くなりピカール型の近似では収束がいえなくなる。そこで評価の悪くなった分を逐次近似のシェーマで打ち消すことを考えて，速く収束するシェーマ例えばニュートン近似を採用する。これを軟化子を作用させる操作と組み合わすわけである。このアイディアをみると，ナッシュの定理においては通常の陰関数定理と同様の線型化方程式の可解性条件の他に次の二条件が本質的であることが判る：（条件A）使用するバナッハ空間の族に近似の度合が定量的に表現されるある種の軟化子，これは smoothing operator と称される，が存在する。(条件B)ニュートン法での２次の近似によって評価の悪さが打ち消されるために，問題の非線型写像とその線型化写像の逆写像の評価不等式がデータに対して１次でなくてはならない。

本論文の数学的技巧上の要点は線型化ステファン問題を解いたことと，もう一つはナッシュの定理を初期値問題に応用する場合に有効と思える一つの論理的わく組を考えたことである。

本論文における線型化ステファン問題の解法についてふれる。線型化ステファン問題を解くことの数学的核心は境界条件がある線型一階偏微分方程式で与えられている放物型混合問題を解くことにある。この問題は，ディリクレ型放物型混合問題と領域全体に拡張された上記線型一階偏微分作用素についての初期値問題に分解して順次解いていくという手法で解かれる。この時当初物理的な条件と思われた温度データの非負性が上記後者の初期値問題の可解条件となっていることが判る。また，２次元以上の問題では，境界上の線型一階偏微分方程式の特性典線が境界上で拡散の全方向をおおえないことを理由として，みかけ上だけのものとは思いがたい微分可能性の損失が生じていることが判る。このように線型化問題を調べることがステファン問題自体の性格の理解についても多少新しい視点を与えているように思える。

次に条件A，Bについて述べる。ナッシュの陰関数定理が通常複雑でわかりにくいという印

象をもたれているのはこの二条件の性格がとらえにくい点にあると思われる。しかし，現時点までにナッシュの定理の応用例があくつかあるわけだがそれらの研究によって上記の二条件が意外に普遍的な性格をもったものであることがわかってきたといえるだろう。条件Aつまりsmoothing operatorの存在は，ナッシュ(1956)がn回連続的微分可能な関数の空間上につくったものがそのままヘルダーやリボレフ空間上のそれにもなっていることがわかっている。また条件Bは，問題の非線型写像とその線型化写像の逆写像を定義している各段階での数学的演算がある種の均衡性をもった評価を充たしていることをいえば，自動的にえられることがわかっている。例えばある楕円型自由境界問題にナッシュの定理を応用したヘルマンダー（1976）の仕事をみると，ヘルダー空間を使用することにより条件Aはみたされているし，また問題の非線型写像とその線型化写像の逆写像は，加減乗除，微分，写像の合成，　traceをとること，線型楕円型境界値問題をとくこと等で構成されるので，これらの演算が上記均衡性をみたすことを検証して条件Bを示している。そして各検証自体は容易である。

本論文もこのような〝二条件の普遍性を示していく方向〟にささやかながら寄与していると思われるので最後にその点について述べておく。線型化ステファン問題を解く過程でヴォルテラ型の積分方程式を解くことを何度かくり返さなくてはならない。これはノイマン級数をとることによって遂行されるのであるが，この演算は一般に上記のような均衡性を保持しない。そこで使用するバナッハ空間を意味のある階数までの微係数が $t=0$ ですべて0になっている関数からなるものに限定する。このことは問題がある問題の線型化であることから一般にできる。こうしておくと積分作用素 $\int_0^t$ とノルムがある意味で交換することがいえて，上記のヴォルテラ型方程式をノイマン級数で解く演算が求める均衡性をみたすことが自然にいえる。このように限定した空間での smooshing operator として先に述べたものを使用することはできないが，幸いにナッシュ（1966）が実解析的リーマン多様体をユークリッド空間に埋蔵する際に考案した手法により求めるものを構成することができる。ここでの論法は先にのべたようにナッシュの定理を初期値問題に応用する場合有効であると思われる。

論文審査の結果の要旨

偏微分方程式の通常の境界値問題は，境界条件が前もって与えられているとき，これら境界条件をみたす解を求める問題である。それに対し，物理学，幾何学から提起される種々の問題には，融解現象の数学的モデルとして知られるステファン問題，超音速流での衝撃波の問題，極小典面の問題等にみられるように，境界の全体あるいは少なくともその一部がアプリオリには与えられてはおらず，それらを逆に，偏微分方程式の解の第一種不連続面として，解の内的性質と不連続面の近傍での附帯条件から決定することが要求される問題も多い。この種の問題は，偏微分方程式の自由境界値問題と名付けられているが，その取扱いは偏微分方程式の解空間の特性が本質的に関係してくるだけに，通常の境界値問題に比較して格段に難しい。実際，ステファン問題についても，これまでの研究の殆んどは一次元化可能な場合に限られており，著者がかかる問題の解決にあたり展開した方法は極めて一般的な性格をもつもので，他の自由境界値問題への適用の可能性を秘めている。その考えは，境界の位置・形状を一つの変数と見做し，ステファン問題を，熱方程式のグリーン核を通して無限次元関数空間における或る種の写像の問題としてとらえ，解の存在定理を写像に関する陰関数定理の証明に帰着することにある。ここでの問題点は，無限次元関数空間での陰関数定理において通常要請されるフレッシェ微分の可逆性が成り立たないことにあるが，著者は，かつてナッシュがリーマン多様体のユークリッド空間への等長埋め込みの際に用いた手法に着目し，それらを修正・改良することにより，フレッシェ微分の近似逆作用素を巧妙に用いて，古典解の存在を導くことに成功している。

このように本論文は，偏微分方程式の自由境界値問題の一典型としてのステファン問題につき，初めて一般的に古典解の存在を示し，かかる問題に対する数学的基礎を確立するとともに，他の自由境界値問題解決のための新しい研究方法を提起したものとして，極めて興味深い論文であり，理学博士の論文として合格と認める。