論 文 内 容 要 旨

(NO. 1)

氏　　名	梅原　慶裕	提出年	平成 27 年
学位論文の 題　　　目	Cotton functional and three-dimensional conformal geometry （コットン汎関数と３次元共形幾何学）		

論 文 目 次

論 文 要 旨

X を３次元閉多様体とする．X 上の Riemann 計量 g が共形平坦であることは Cotton テンソルと呼ばれるテンソル場 $C_3(g)$ が消えていることと同値であることが知られている．この Cotton テンソルのノルムの積分 $\mathcal{C}(g):=\int_X |C_3(g)|_g\, d\mu_g$ を考えることで，Riemann 計量全体の空間上の汎関数を得ることができる．本博士論文ではこの汎関数 $\mathcal{C}$ のことを Cotton 汎関数と呼ぶ．$\mathcal{C}$ は共形不変であり，Riemann 計量 g が共形平坦であることは $\mathcal{C}(g)$ が消えていることと同値になる．ゆえに, Cotton 汎関数 $\mathcal{C}$ は計量の共形平坦性からの乖離を定量的に測るものと見なせる．また $\mathcal{C}$ は共形不変なので共形構造全体の空間の上で定義された汎関数と見なせることに注意する．本博士論文での興味の対象は汎関数 $\mathcal{C}$ の性質と $\mathcal{C}$ よって捉えられる共形構造全体の空間の性質である．一般の次元 $n\,(\geq 4)$ の場合では Weyl テンソルの $L^{n/2}$-ノルムを考えることで共形不変な汎関数 $\mathcal{W}$ を得ることができる．この $\mathcal{W}$

に関しては比較的多くの研究がなされている．その一方で，Cotton 汎関数 $\mathcal{C}$ に関する体系的な研究は行われていない．この汎関数は 3 次元の共形不変量として自然なものであるから、$\mathcal{W}$ の場合と同様に研究されるべき対象である．そこで次のことを行った．

（1） 計量 g が変化すると汎関数 $\mathcal{C}(g)$ の値が変化するが，特定の方向に g を動かした場合での $\mathcal{C}(g)$ の変化について何らかの特徴を見出したいと考え，Ricci 流と呼ばれる計量の発展方程式によって変形される場合を研究した．具体的には Cotton 汎関数の Ricci 流の下での発展方程式を求め，特に局所等質計量を初期計量とする Ricci 流の解に対する $\mathcal{C}$ の挙動を調査した．

（2） 定スカラー曲率でかつ任意に大きい Cotton 汎関数をもつ計量の構成を行った．より正確には，山辺不変量 $Y(X)$ が正の場合，任意の定数 r に対して，X 上の体積が 1 のなめらかな計量でスカラー曲率が r かつ Cotton 汎関数が任意に大きいものを構成した．$Y(X)$ が非正の場合，任意の定数 $r < Y(X)$ に対して同様の計量を構成した．共形構造全体からなる空間は非コンパクトであるが，この結果は $\mathcal{C}$ を用いた非コンパクト性の表現とも見なせる．

（1）の詳しい内容は以下の通りである．Ricci 流は初期計量をより等質的で等方的な計量に変形する傾向をもっている．実際，Ricci 流の解を体積が一定となるように正規化したものが収束すれば，3 次元の場合には極限計量は定断面曲率計量となる．例えば，R. Hamilton による基本的な結果として，3 次元多様体が閉で初期計量の Ricci 曲率が至る所正の場合，Ricci 流の正規化した解は時間無限大まで存在して，定断面曲率計量に収束することが知られている．一般には Ricci 流の解は有限時刻で曲率が無限大に発散する領域(特異点)が形成され、収束しない．その典型的な特異点の形成の状況は多様体内のシリンダー状の部分の横断的球面がピンチして消滅する場合である．これらの事実を $\mathcal{C}(g)$ の変化という観点で見ると，Hamilton の結果の様に計量が収束する場合には $\mathcal{C}(g)$ は収束し，特異点が形成される場合であっても、$\mathcal{C}(g)$ は発散しないことが期待できる．まず次を行った．

主定理 1

Ricci 流の下での Cotton 汎関数 $\mathcal{C}$ 及び Cotton テンソルの L^2-ノルムの発展方程式をもとめた．

特に，3 次元の閉多様体上の局所等質計量 g_0 を初期計量とする Ricci 流の解 $g(t)$ に対する $\mathcal{C}(g(t))$ の挙動を調べた．結果を述べるためにいくつか準備をする．$\tilde{X}$ を X の普遍被覆空間とし，π をその被覆写像とする．このとき，$\pi^*g(t)$ は $\tilde{X}$ 上の Ricci 流の解となり，またすべての t に対して等質計量になる．π は局所微分同相写像であることから $\pi^*g(t)$ を調べることで $g(t)$ の挙動を得ることができる．$(\tilde{X}, \pi^*g_0)$ は次のいずれかになることが知られている：(a) (H^3, ag_{H^3})，$(S^2\times\mathbb{R}, ag_{S^2}+bg_{\mathbb{R}})$，$(\mathrm{H}^2\times\mathbb{R}, ag_{H^2}+bg_{\mathbb{R}})$，または (b) $\tilde{X}$ は $\mathrm{SU}(2)$, $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$, Heisenberg 群，$\tilde{E}(2)$, $E(1,1)$, $\mathbb{R}^3$ で π^*g_0 はある左不変計量．ここで $a, b \in \mathbb{R}$, $E(2)$ は $\mathbb{R}^2$ の向きを保つ等長変換全体，$E(1,1)$ は平坦な Lorentz 計量も伴った平面の向きを保つ等長変換全体であり，チルダは普遍被覆空間を表す．特に $\mathrm{SU}(2)$ は S^3 と微分同相であり，その他の Lie 群は $\mathbb{R}^3$ に微分同相である．(b)の場合，π^*g_0 に対して，Milnor 枠と呼ばれる $\tilde{X}$ 上の左不変直交枠が存在する．Milnor 枠に関して $\pi^*g(t)$ は対角化され，その対角成分は t にのみ依存するある正の関数 $A(t), B(t), C(t)$ を用いて表せることに注意しておく．J. Isenberg と M. Jackson は $\pi^*g(t)$ の挙動を調査することにより体積一定となるように正規化した解 $g(t)$ の挙動を調査している．彼らは，普遍被覆空間が H^3, $\mathrm{SU}(2)$, $\tilde{E}(2)$, $\mathbb{R}^3$ の場合には定曲率計量に収束し，$H^2\times\mathbb{R}$,

$\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$，Heisenberg 群，$E(1,1)$ の場合には，解は時間無限大まで存在して，１つまたは２つの方向に直径が無限に大きくなり，残りの方向の直径が 0 に近づいて，曲率が 0 に限りなく近づきながら退化し，$S^2\times\mathbb{R}$ の場合には，解は有限時刻で曲率が発散して退化することを示した. Cotton 汎関数 $C(g(t))$ の挙動は次の様になる.

主定理２

$g(t)$ を３次元閉多様体 X 上の局所等質計量 g_0 を初期計量とする Ricci 流の解とする. Cotton 汎関数 $C(g(t))$ の挙動は以下の様になる．ただし，X の普遍被覆空間が $\mathrm{SU}(2)$，$\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$ の場合は g_0 が $B(0) = C(0)$ を満たしていると仮定する．（このとき $(\mathrm{SU}(2), g_0)$ はいわゆる Berger 球面である）.

(i) 普遍被覆空間が $\mathrm{SU}(2)$ で g_0 が $A(0)/B(0) < 1/2$を満たしてる場合，$C(g(t))$ は始め単調増加して $A(t_0)/B(t_0) = 1/2$を満たす時刻 t_0 で唯一の極大値とり，その後単調減少して極大時刻で 0 収束する. $A(0)/B(0) \geq 1/2$ の場合，$C(g(t))$ は単調減少し，極大時刻で 0 に収束するか，又は恒等的に 0 である.

(ii) 普遍被覆空間が $\mathrm{SU}(2)$ 以外の場合，$C(g(t))$ は単調減少して時間無限大で 0 に収束するか，恒等的に 0 である.

次に考えるのはこれまでとは反対に $C(g)$ の値が任意に大きい計量についてである.（２）の正確な主張は次である.

主定理３

X を３次元閉多様体とし，r を任意の実数とし $G > 0$ を任意の正の数とする．このとき，$Y(X) > 0$ または $[Y(X) \leq 0$ かつ $r < Y(X)]$ ならば，X 上の滑らかな計量 g で体積が 1 で，スカラー曲率が r で，かつ $C(g) > G$ であるものが存在する．ここで，$Y(X)$ は X の山辺不変量である.

$Y(X) \leq 0$ のとき $r > Y(X)$ をみたす r をスカラー曲率とする計量は存在しないことに注意する．実際，$Y(X) \leq 0$ であることは X 上の計量でスカラー曲率が正であるものが存在しないことと同値であり，また体積が 1 で非正の定スカラー曲率 r を持つ計量 g は $r = Y(X,[g]) \leq Y(X)$ を満たさなければならないことが知られている．ここで，$Y(X,[g])$ は共形類 $[g]$ の山辺定数である． 主結果３の主張はこの山辺定数を用いて次の様に書き換えることができる： $[Y(X) > 0$ かつ $r \leq 0]$ または $[Y(X) \leq 0$ かつ $r < Y(X)]$ のとき，$r = Y(X,[g])$ かつ $C(g) > G$ であり，$[Y(X) > 0$ かつ $r > 0]$ のとき，$0 < Y(X,[g]) \leq r$ かつ $C(g) > G$ と書ける．ゆえに主定理３は共形類に対する２つの共形不変量の組の値の関係を表しているとも解釈できる．主定理３の証明では, J. Corvino, M. Eichmair, P. Miao らによる定スカラー曲率計量に対する貼り付けの定理と Berger 球面の性質を利用する．Corvino らは同じ定スカラー曲率をもつ２つのコンパクト Riemann 多様体がある条件を満たすとき，連結和上の計量で同じ値の定スカラー曲率をもち，体積が元の２つの多様体の体積の和に等しい計量が存在することを示した．主定理３の証明では Berger 球面がその条件を満たすことを示し，この貼り付けの定理を用いて，X 上に適切な定スカラー曲率計量を準備して，それに十分な数の適当にリスケールした Berger 球面を貼り付けることによって求める計量を構成する．その際，主定理２を示す為に求めた Berger 球面に対する $C(g)$ の明示的な表示を用いる.

論文審査の結果の要旨

(M,g)を n 次元リーマン多様体とする。n=2 のときリーマン多様体は局所共形平坦、すなわち各点の近傍に関数 f>0 が存在して fg は局所的にユークリッド空間と等長となる。n>2 の場合には一般的に局所共形平坦とは限らない事が知られている。M の曲率テンソル R はスカラー曲率 S、トレースレス・リッチ曲率 E から決まる成分とその剰余として定まるワイル曲率 W の和として与えられるが、n>4 では共形平坦の条件は W=0 で与えられる事が知られている。n=3 の場合は、常に W=0 であり、共形平坦性は R の共変微分で与えられるコットン・テンソル C を用いて C=0 と特徴付けられる。

ワイル曲率に関しては様々な研究が行われているが、コットン・テンソルに関してはまだまだ未解明な部分も多い。３次元閉リーマン多様体のコットン・テンソルのノルムの積分で与えられる汎関数:コットン汎関数は計量の共形変形では不変であり、共形構造に対して定まる量となっている。梅原慶裕提出の学位論文は、コットン汎関数の幾何学的意味を調べた研究である。

学位論文は二つの部分から成る。

第一のパートでは、リッチ流の下でコットン汎関数がどの様な挙動をしているかを調べた。ペレルマンによる幾何学化予想の証明との関連から、梅原は 3 次元閉多様体上の一般の計量に対しリッチ流の下でのコットン汎関数の変形公式を導出し、多くの局所等質空間計量に関してはコットン汎関数が 0 に収束することを示した。

第二のパートでは、既存のワイル曲率汎関数に関する研究をコットン汎関数に拡張した。即ち、与えられた 3 次元閉多様体上に、山辺不変量による制限の下で、任意の実数をスカラー曲率として許容する体積 1 のリーマン計量で、そのコットン汎関数が幾らでも大きなものが存在することを示した。

リッチ流とコットン汎関数が良い関係にある可能性を示唆し、またコットン・テンソルとスカラー曲率のある種の独立性を示す等、コットン汎関数の幾何の可能性を与えた研究は独創性があり、梅原氏が自立して研究活動を行うに必要な高度の研究能力と学識を有することを示している。したがって、梅原慶裕提出の博士論文は、博士(理学)の学位論文として合格と認める。