論 文 内 容 要 旨

(NO. 1)

氏　　名	三浦　佑介	提出年	平成 28 年
学位論文の題　　目	Girsanov transformation of symmetric Markov processes and its applications （対称マルコフ過程のギルサノフ変換とその応用）		

論 文 目 次

論文要旨

本学位論文では対称マルコフ過程のギルサノフ変換を主題として扱った．

本研究で考察する問題を説明するために，$\{B_t\}_{t\geq 0}$ を $\mathbb{R}^d$ 上のブラウン運動とする．ρ を 1 位のソボレフ空間に属する非負関数とし，

$$L_t^\rho := \exp\left(\int_0^t \frac{\nabla\rho}{\rho}(B_s)\cdot dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \left|\frac{\nabla\rho}{\rho}\right|^2(B_s)ds\right) \tag{1}$$

と定める．ただし，右辺括弧内第 1 項はブラウン運動による伊藤積分を表す．このとき，ウィーナー測度に汎関数 L_t^ρ を掛けて与えられる確率測度でブラウン運動を眺めることにより，新たな確率過程が得られる．この測度変換による確率過程の構成はギルサノフ変換と呼ばれている．今の場合，変換後の過程は集合 $\{x\,|\,\rho(x)>0\}$ を状態空間とする $\rho(x)^2dx$ に関して対称な拡散過程となり，その生成作用素は $\frac{1}{2}\triangle$ から $\frac{1}{2}\triangle+\frac{\nabla\rho}{\rho}\cdot\nabla$ へと変化している．よって，ρ の減少にしたがってその逆向きのドリフト $\frac{\nabla\rho}{\rho}$ が強く働くために，変換過程は ρ の零点集合に到達しないことが予想できる．また，$d\geq 3$ 以上のとき元のブラウン運動は過渡的となるが，自乗可積分性の条件により ρ は遠方で 0 に減少し，それに応じて遠方から内部方向へのドリフトの作用が働くために変換後の過程は再帰的になると期待できる．実際にこれらの予想は正しく，零点への非到達性及び再帰性が Meyer-Zheng(1985) と Oshima-Takeda(1987) により証明されている．本論文では一般のマルコフ過程を同様の型の汎関数により変換して得られる対称マルコフ過程の性質を考察する．

$\mathbb{M}$ を局所コンパクト距離空間上の対称ハント過程とし，関数 ρ を $\mathbb{M}$ に対応するディリクレ形式の定義域に局所的に属し，かつ福島分解可能なものとして取る．福島分解とは，対称マルコフ過程の加法的汎関数をマルチンゲール部分とエネルギー零の部分の和で表すという公式である．ρ の分解のマルチンゲール部分を用いた Doléans-Dade 型確率微分方程式の解として，(1) に対応する汎関数 L_t^ρ が定められる．この L_t^ρ によるギルサノフ変換で得られる新たな対称マルコフ過程を以降 $\mathbb{M}^\rho$ と記し，$\mathbb{M}^\rho$ の生存時刻を粒子が無限遠点または ρ の零点に初めて到達した時刻として定める．福島分解に関する注意として，$\mathbb{M}$ が拡散過程（道が連続な過程）の場合，局所ディリクレ空間に属する関数は福島分解可能であることが知られているが，道が連続ではない場合は必ずしも可能ではない．しかしながら，近年に Kuwae(2010) が道が連続ではない場合における福島分解可能な関数空間を新たに導入した．この結果により，既存の研究よりも広いクラスの ρ に対して上記の $\mathbb{M}^\rho$ が構成可能になった．以下 $\mathbb{M},\mathbb{M}^\rho$ に対応するディリクレ形式をそれぞれ $(\mathcal{E},\mathcal{D}(\mathcal{E}))$，$\big(\mathcal{E}^\rho,\mathcal{D}(\mathcal{E}^\rho)\big)$ と表す．

Fukushima-Oshima-Takeda(1994) は $\mathbb{M}$ が保存的（生存時刻が確率 1 で無限大）な拡散過程で，かつ ρ のエネルギー測度が有限なとき，変換過程 $\mathbb{M}^\rho$ は再び保存的，つまり ρ の零点に確率 1 で到達しないことを証明した．本研究では，$\mathbb{M}$ の道の連続性の仮定を外してもこの主張が成立することを証明した．変換過程 $\mathbb{M}^\rho$ が保存的であることと指数型の局所マルチンゲール L_t^ρ がマルチンゲールであることは同値なので，この問題は L_t^ρ のマルチンゲール性に関する問題へと置き換えられる．指数型局所マルチンゲールがマルチンゲー

ルとなるための十分条件としてはノビコフの定理が有名であるが，連続性を仮定しない場合はその定理を適用できないことが問題となる．本論文では Z.-Q. Chen(2012) による指数型マルチンゲールの一様可積分性の条件を用いることでその問題を解決した．また，保存性に関する結果として，関数 ρ が拡大ディリクレ空間に属するならば，$\mathbb{M}$ の保存性に関わらず変換過程 $\mathbb{M}^\rho$ は再帰的となることを示した．関数 ρ が通常のディリクレ空間 $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ の元であるときに変換過程が再帰的であることは既に Z.-Q. Chen et al.(2004) により証明されており，この結果はその拡張を与えるものである．この主張の中で強調すべき点は，変換前の過程 $\mathbb{M}$ が内部消滅を許す場合であっても，変換後の過程 $\mathbb{M}^\rho$ は保存的で内部消滅を持たないという点である．また，ρ が有界のとき，変換後のディリクレ形式の定義域 $\mathcal{D}(\mathcal{E}^\rho)$ は元の定義域 $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ より広くなり，$u \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ に対する $\mathcal{E}^\rho(u,u)$ の値は $\mathcal{E}$ の強局所部分，飛躍測度，消滅測度を用いて表せることを証明した．

上で得られた結果を，測度 μ に対するハーディ型不等式

$$\int u^2 d\mu \le \mathcal{E}(u,u), \quad {}^\forall u \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \tag{2}$$

へ応用することを考察する．$\mathbb{M} = \{X_t\}_{t\ge 0}$ を強フェラー性を持つ過渡的なマルコフ過程とし，μ をグリーン緊密な加藤クラスに属する測度とする．μ によるランダムな時間変更過程のスペクトル下限 $\lambda(\mu)$ が 1 より大きいとき，Z.-Q. Chen(2002) の結果によりファインマン・カッツ乗法汎関数に対するゲージ関数が有界になる．$\lambda(\mu) = 1$ の場合は Takeda(2014) の結果により，シュレディンガー方程式 $\mathcal{L}^\mu = \mathcal{L} - \mu$ に関する基底が拡大ディリクレ空間に属する有界連続関数として構成できる．ここで，$\mathcal{L}$ は $\mathbb{M}$ の生成作用素である．以下，不等式 (2) が成立すると仮定する．これは $\lambda(\mu) \ge 1$ と同値であり，ゲージ関数（$\lambda(\mu) = 1$ の場合は基底）を ρ とおく．このとき，ρ は Kuwae の導入した福島分解可能な関数空間に属するので，汎関数 L_t^ρ 及びギルサノフ変換過程 $\mathbb{M}^\rho$ が先程と同様に定義できる．また，一般には福島分解のエネルギー零の部分は有界変動になるとは限らないが，いま定めた ρ のエネルギー零の部分は有界変動過程となることが示せる．従って，伊藤の公式が適用可能で，L_t^ρ は

$$L_t^\rho \;=\; \frac{\rho(X_t)}{\rho(X_0)} \exp\left(A_t^\mu\right)$$

と簡潔に表現される．ここで，A_t^μ は測度 μ にルヴューズ対応する正値連続加法的汎関数である．この表現から，過程 $\mathbb{M}^\rho$ は μ のファイマン・カッツ乗法汎関数にドゥーブの h 変換を施して得られるマルコフ過程と一致することがわかり，等式

$$\mathcal{E}(u,u) - \int u^2 d\mu \;=\; \mathcal{E}^\rho\left(\frac{u}{\rho}, \frac{u}{\rho}\right), \quad {}^\forall u \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \tag{3}$$

が導ける．さらに，ρ の有界性と前段落の結果から，(3) の右辺を $\mathcal{E}$ に付随する測度を用いて詳細に記述することができる．これらの結果は不等式 (2) の精緻化と見なせる．ハーディ型不等式の精緻化は近年 Frank，Seiringer などにより解析的な手法で研究が進められており，本論文ではグリーン緊密な加藤クラスの測度に対する同結果を上述の確率論的な手法を用いて導出した．

論文審査の結果の要旨

本論文では、局所コンパクト距離空間上の対称マルコフ過程に対し対称性を保存するギルサノフ変換を考え、変換してできるマルコフ過程のディリクレ形式を特定することによりその大域的性質を調べることを目的とした。

対称ディリクレ形式の定義域に局所的に属し、福島分解可能な関数のクラスを考える。福島分解とは、ある加法的汎関数をマルチンゲール部分とエネルギー零の和に分解する公式である。福島分解のマルチンゲール部分を用いて Doleans-Dade 確率微分方程式が定義され、その解として乗法汎関数が定義される。その乗法汎関数をラドン・ニコディム密度とする新たなマルコフ過程を構成する方法はギルサノフ変換と呼ばれる。本論文では特に対称性を保つギルサノフ変換に焦点をあて、変換で構成される対称マルコフ過程が生成するディリクレ形式の同定をした。その応用として、変換過程の道の性質、特に保存性・再帰性についての大域的性質を調べることが可能になった。対称拡散過程（道が連続な過程）の場合には、保存性・再帰性に関しては多くの研究がある。保存性証明には指数型マルチンゲールがマルチンゲールになることを示す必要があるが、飛躍がある場合の乗法汎関数に対してはその確認が困難になる。三浦君は、Z.-Q. Chen(2012)による指数型マルチンゲールの一様可積分性の条件を用いることでマルチンゲール性を確認し保存性を示した。有限な生存時間を持つ場合でも保存性だけでなく再帰性を持つものに変換するギルサノフ変換のクラスを与えた。

上で得られた結果を，測度に対するハーディ型不等式の精密化に応用した。ギルサノフ変換はファインマン・カッツ変換とドゥーブ h-変換の合成とみなせることを示し、それぞれの変換により生成される対称形式を比較することで、ハーディ型不等式の精密化を得ようとする試みで興味深いアイデアである。グリーン緊密な加藤クラスの測度に制限されているものの、伊藤の公式を用いた確率論的な手法は新しく見通しのよい証明法を与えている。

その他、対称マルコフ半群の内在的な超縮小性による準定常分布の存在と一意性を示した。一次元拡散過程の場合に限っても、スケール関数と標準測度の言葉で内在的な超縮小性を持つための十分条件が知られており、三浦君の結果を応用することで特異な一次元拡散過程に対しても準定常分布の存在と一意性が示せ、新たな応用例を与えることができる。

以上のように、自立して研究活動を行うに必要な高度の研究能力と学識を有することを示している。したがって、三浦佑介提出の博士論文は，博士（理学）の学位論文として合格と認める。