氏名(本籍)	田近 一郎(たぢか いちろう) (兵庫県)
学位の種類	博 士(情報科学)
学位記番号	情博 第１００号
学位授与年月日	平成11年3月25日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
研究科，専攻	東北大学大学院情報科学研究科(博士課程)情報基礎科学専攻
学位論文題目	実時間学習過程に関する研究
論文審査委員	(主 査) 東北大学教授 丸岡 章 東北大学教授 西関 隆夫 東北大学教授 阿曽 弘具 (工学研究科)

論文内容要旨

1 序論

大規模なデータからその背後にある一般的な法則を抽出するという学習機能を計算機で実現する問題は重要な問題である．特に，Valiantにより始められた計算学習理論では，学習を広い意味での計算と捉えて，学習アルゴリズムが外界から情報を得てある概念を学習する過程を数学的にモデル化し，そのモデルの下で何が学習可能で，何が学習不可能かを明らかにするとともに，可能な場合は，学習アルゴリズムを具体的に設計する．学習モデルは，例題(データ)の集まりを一括して入力として与えられると仮説を出力するバッチ型(一括処理型)と各時刻に1個づつ例題を与えられるたびに仮説を出力するオンライン型(逐次処理型)に分けられる．

Valiantが提案した近似学習のモデルとして広く用いられるバッチ型の学習モデルであるPAC学習モデルでは，仮説の良さの尺度として学習対象に対する仮説の誤り確率を用い，誤り確率の十分小さい仮説を求めることを目標とする．本研究では，情報理論的な見地から，学習の目標は学習対象に関するより多くの情報を獲得することとの立場に立ち，学習対象と仮説の間の相互情報量を仮説の良さの尺度として導入し，学習理論の新しい展開を目的とする．ある情報源が生成する事象を逐次的に予測する問題について，複数の予測戦略がそれぞれ出力した予測を統合し自らの予測を決定するというオンライン予測モデルがLittlestoneとWarmuthにより提案されている．本研究では，このモデルを，予測戦略と予測アルゴリズムがそれぞれ予測に対する信頼度を自己申告するというモデルに拡張し，拡張されたモデルの下で効率の良い予測アルゴリズムの構成を目的とする．さらに，Helmboldらにより提案された投資の対象とする複数の株式銘柄をあらかじめ選んでおき，それらに対する分散投資の戦略を株価の動向から逐次決定するというオンライン分散投資問題について，本研究では，各銘柄に対して毎回同じ比率で投資をする投資戦略のうち，最適なものにほぼ匹敵する性能を達成することという従来のアルゴリズムの目標を，投資期間をいくつかの区間に分割し，区間内では毎回同じ比率で投資をするが，区間毎に異なる比率で投資をするような，より適応的な投資戦略のうち，最適なものにほぼ匹敵する資産減少率を達成することと一般化し，この目標を達成する効率の良いオンライン分散投資アルゴリズムの構成を目的とする．

2 学習モデル

第2章では，本研究で用いるPAC学習モデル，実時間予測モデル，実時間決定モデルの3つを定義した．ここでは，第3章で必要となるPAC学習アルゴリズムの定義を行う．Xを定義域とし，$\{0,1\}^X$で，Xから$\{0,1\}$への関数全体の集合を表す．以下では，関数$f\in\{0,1\}^X$を集合$\{x\in X|f(x)=1\}$と同一視することもある．Xのある要素xに対し，$(x,f(x))$をfの例題とよぶ．fの例題の有限列をfのサンプルと呼び，fのサンプルに含まれる例題の個数をそのサンプルのサイズという．関数のクラス$F\subseteq\{0,1\}^X$に対し，Fの学習アルゴリズムとは，Fのサンプルの集合から$\{0,1\}^X$への関数である．すなわち，Fの学習アルゴリズムAとは，ある関数$f\in F$のサンプルが入力として与えられると，関数$h\in\{0,1\}^X$を出力するものである．このとき，学習対象であるfを目標関数，アルゴリズムが出力する関数hを仮説とよぶ．学習アルゴリズムに与えられる例題$(x,f(x))$中のxは，X上のある確率分布Dに従って独立に生成されるとする．従って，サンプルのサイズをmとすると，そのサンプルを入力した時学習アルゴリズムが出力する仮説hは，D^m上の確率変数とみなすことができる．Xの部分集合cに対し，$D(c)$はDの下でのcの確率，すなわち，xが確率分布Dに従って生起したとき，$x\in c$となる確率を表す．すると，仮説hの誤り確率は，$D(f\bigtriangleup h)$と表される．但し，$f\bigtriangleup h$はfとhの対象差

$(\{x \in X | f(x) \neq h(x)\})$ を表す．これらの準備の下に，(強) PAC 学習アルゴリズムの定義を与える．

定義　アルゴリズム A が関数のクラス Fの強 PAC 学習アルゴリズムであるとは，関数 $m : R^2 \to N$が存在して，任意の $0 < \varepsilon, \delta \leq 1$ と，任意の $f \in F$，X上の任意の確率分布 Dに対して，A は，サイズ $m(\varepsilon, \delta)$ 以上の fのサンプルが入力として与えられると，$1-\delta$以上の確率で，$D(f \triangle h) \leq \varepsilon$，または，$D(f \triangle h) \geq 1-\varepsilon$ なる仮説 h を出力することである．ここで，m を A のサンプルサイズ関数とよぶ．また，R，Nは，それぞれ，実数の集合，自然数の集合である．

次に，弱 PAC 学習アルゴリズムの定義を与える．弱 PAC 学習アルゴリズムは，仮説の誤り確率に対する条件を弱め，ランダムな仮説と有意な差が認められればよいとする．

定義　アルゴリズム A が関数のクラス Fの弱 PAC 学習アルゴリズムであるとは，定数$\gamma > 0$ とサンプルサイズ関数 $m : R \to N$ が存在して，任意の $0 < \delta \leq 1$，任意の $f \in F$と X上の任意の確率分布 Dに対して，A は，サイズ $m(\delta)$ 以上の fのサンプルが入力として与えられると，$1-\delta$以上の確率で，$D(f \triangle h) \leq 1/2 - \gamma$，または，$D(f \triangle h) \geq 1/2 + \gamma$ なる仮説 h を出力することである．

3 情報獲得モデルとブースティング

第 3 章では，学習対象と仮説の間の相互情報量を仮説の良さの尺度として導入し，まず，従来の PAC 学習モデルにおける誤り確率の尺度では説明しきれないいくつかの例を与え，それらがこの新しい尺度で良く説明できることを示す．次いで，学習の目的を相互情報量の大きい仮説を求めることであるとする情報獲得アルゴリズムの概念を新しく導入し，PAC 学習アルゴリズムとの関係を調べる．獲得する相互情報量の大きさに基づいて，強情報獲得アルゴリズムと弱情報獲得アルゴリズムの概念を導入し，強 PAC 学習アルゴリズムと強情報獲得アルゴリズムはほぼ等価な概念であるのに対し，弱情報獲得アルゴリズムは弱 PAC 学習アルゴリズムよりも弱い概念であることを示す．さらに，弱情報獲得アルゴリズムから強情報獲得アルゴリズムに変換する一般的なブースティングスキーマを与える．

各 x に対してコインフリップを用いて値 $h(x)$ を定めるようなランダムな仮説の持つ誤り確率は 1/2 であり，このような仮説が学習対象に関して何らかの情報を含んでいるとは考えにくい．実際，Schapire と Freund は，誤り確率が 1/2 よりわずかに小さい仮説を出力する弱 PAC 学習アルゴリズムを用いて，誤り確率が十分小さい仮説を出力する強 PAC 学習アルゴリズムを構成する，いわゆるブースティングスキーマを与えたが，誤り確率がちょうど 1/2 の仮説から精度を高める一般的なブースティングスキーマは存在しない．一方，Natarajan は，ちょうど誤り確率 1/2 の片側誤りの仮説を出力する学習アルゴリズムから，誤り確率が十分小さい仮説を出力する強 PAC 学習アルゴリズムを構成するブースティングスキーマを与えた．ここで，仮説 h が片側誤りであるとは，学習対象を fとするとき，$h^{-1}(1) \subseteq f^{-1}(1)$ となることである．このことは，誤り確率が最悪の 1/2 である仮説でも，fに関する何らかの情報を持ち得ること，また，これらの部分的な情報を有効に引き出し蓄積することによって，fに関する十分な情報を得ることができることを意味している．この 2 つの事例は，尺度として誤り確率を用いると区別できないが，学習対象 fを近似する仮説 h の精度の尺度として，$D(f \triangle h)$ の代りに，h を知ることにより fに関して得られる情報，すなわち，fと h の間の相互情報量を用いると説明がつく．x を，確率分布 Dに従って Xの要素を値としてとる確率変数とし，$f(x)$ と $h(x)$ と表される確率変数を，それぞれ単に fと h で表す．確率変数 fと h の関係は，2 元通信路の概念を用いて表すことができる．$p_0 = D(X - f)$，$p_1 = D(f)$ とし，α_0とα_1をそれぞれ h の負誤差と正誤差，すなわち，$\alpha_0 = \mathrm{Pr}_D[h = 1 | f = 0]$，$\alpha_1 = \mathrm{Pr}_D[h = 0 | f = 1]$ とする．$D(f \triangle h) = p_0\alpha_0 + p_1\alpha_1$となることに注意されたい．このとき，$f$と h の間の相互情報量 $I_D(f; h)$ は，エントロピー関数 H を用いて，$I_D(f; h) = H(f) - H(f|h)$ と定義される．相互情報量 $I_D(f; h)$ は，パラメータ p_0，p_1，α_0，α_1を用いて次のように表すことができる．なお，2 を底とする対数を用いて，2 元エントロピー関数を $H_n(p) = -p \log p - (1-p)\log(1-p)$ と表す．

定理　fと h を確率変数とすると，$I_D(f; h) = H_n(p_0\alpha_0 + p_1(1-\alpha_1)) - \{p_0 H_n(\alpha_0) + p_1 H_n(1-\alpha_1)\}$．

この定理より，コインフリップを用いる仮説 h について$\alpha_0 + \alpha_1 = 1$ が成立するから $I_D(f; h) = 0$ となる．一方，仮説 h が fに関する情報を含むと考えられる $h \subseteq f, D(f \triangle h) = 1/2$ の場合は，$\alpha_0 = 0$ かつ$\alpha_1 = 1/(2p_1)$ となり，$p_1 > 1/2$ $(\alpha_1 < 1)$ のときは $I_D(f; h) > 0$ となる．

次に，fと h の間の相互情報量を用いて，情報獲得アルゴリズムの概念を導入する．

定義　アルゴリズム A が Fに対する強情報獲得アルゴリズムであるとは，サンプルサイズ関数 $m : R^2 \to N$が存在して，任意の $0 < \varepsilon, \delta \leq 1$，$f \in F$，$X$上の任意の確率分布 Dに対して，サイズ $m(\varepsilon, \delta)$ 以上の fのサンプルに対して，A が出力する仮説を h とするとき，$1-\delta$以上の確率で，$I_D(f; h) \geq H_n(D(f)) - \varepsilon$，かつ，$H_n(D(f)) \leq \varepsilon/2$ ならば $h = 0$ となることである．

定義　アルゴリズム A が Fに対する弱情報獲得アルゴリズムであるとは，ある定数$\gamma < 1$ とサンプルサイズ関数 $m : R \to N$ が存在して，任意の $0 < \delta \leq 1$，任意の $f \in F$と任意の Dに対して，サイズ $m(\delta)$ 以上の fのサンプルに対して A が出力する仮説を h とするとき，$1-\delta$以上の確率で，$I_D(f; h) \geq H_n(D(f)) - \gamma$，かつ，$H_n(D(f)) < \gamma/2$ ならば $h = 0$ となることである．このγを A の情報獲得パラメータとよぶ．

次に，強 PAC 学習アルゴリズムと強情報獲得アルゴリズムはほぼ等価な概念であるのに対し，弱情報獲得アルゴリズムは弱 PAC 学習アルゴリズムよりも弱い概念であることを示す．

定理　アルゴリズム A が関数のクラス Fの強 PAC 学習アルゴリズムならば，A は Fの強情報獲得アルゴリズムでもある．また，A が Fの強情報獲得アルゴリズムならば，A は Fの強 PAC 学習アルゴリズムでもある．

定理　アルゴリズム A が関数のクラス Fの弱 PAC 学習アルゴリズムならば，A は Fの弱情報獲得アルゴリズムでもある．一方，ある関数のクラス Fについて弱 PAC 学習アルゴリズムではない弱情報獲得アルゴリズムが存在する．

この定理より，Natarajan の片側誤りの学習アルゴリズムは，弱 PAC 学習アルゴリズムではない弱情報獲得アルゴリズムの 1 つの例となっている．

ブースティングスキーマとは精度の低い仮説を多数組み合わせて精度の高い仮説を得る一般的なアルゴリズムである．ここでは，精度の低い仮説の持つわずかな情報量を獲得する弱情報獲得アルゴリズムを十分な情報量を獲得する強情報獲得アルゴリズムに変換するブースティングスキーマを与える．この結果は Natarajan の結果を含み，Schapire，Freund のブースティングスキーマの拡張となる．まず，ブースティングスキーマの概念を厳密に与える．

定義　A を弱情報獲得アルゴリズムとし，A の情報獲得パラメータとサンプルサイズ関数を，それぞれ，γ，m とおく．アルゴリズム $B^A(\gamma, m)$ を，サンプルのほかにγと m も入力として与えられる，オラクル A つきの学習アルゴリズムを表すとする．すなわち，B^Aは，A をサブルーチンとして任意に呼び出すことができる．Bが弱情報獲得アルゴリズムからのブースティングスキーマであるとは，任意の関数のクラス Fの弱情報獲得アルゴリズム A に対し，$B^A(\gamma, m)$ が Fの強情報獲得アルゴリズムとなることである．

定理　弱情報獲得アルゴリズムからのブースティングスキーマは存在する．

4 実時間予測アルゴリズム

ある情報源が生成する事象を逐次的に予測する問題について，Cesa-Bianchi らは，複数の予測戦略 (エキスパート) がそれぞれ出力した予測を統合し自らの予測を決定するという予測アルゴリズム (統合アルゴリズム) のモデルを提案した．このモデルでは，各予測戦略と予測アルゴリズムの損失は予測を誤る回数の期待値で評価され，予測アルゴリズムの目標は，最適な予測戦略との損失の差を最小にすることである．本研究ではこのモデルを拡張し，予測戦略と予測アルゴリズムは，予測の他に予測に対する信頼度 (賭金) を自己申告することとし，その損失を失われた賭金の量で評価する．このモデルの下で，各予測戦略の出力する賭金の時系列がすべて等しい場合に，重み付き多数決アルゴリズムに基づくほぼ最適で効率の良い予測アルゴリズムを与える．

ここで提案する予測に対する確信度の自己申告をゆるすオンライン予測モデルは次の通りである．ある情報源から，各時刻 t ($1 \le t \le T$) ごとに事象 $y_t \in \{0,1\}$ が生成されるとする．いま，各時刻で事象の予測とその予測に対する賭金を出力する N 個のエキスパート $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_N\}$ が存在し，各エキスパート $\mathcal{E}_i$ は，各時刻 t ごとに y_t の値の予測 $\xi_{i,t} \in [0,1]$ と時刻 t の予測に関する賭金 $b_{i,t}$ を出力するものとする．ここで，ある正定数 $m > 0$ が存在して，任意の時刻での各エキスパートの賭金は高々 m であると仮定する．エキスパートの集合 $\mathcal{E}$ を用いる統合アルゴリズム A とは，各時刻 t ごとに，過去の事象の系列 $y_1, \ldots, y_{t-1}$，各エキスパート $\mathcal{E}_i$ の現在までの予測値の系列 $\xi_{i,1}, \ldots, \xi_{i,t}$ と賭金の系列 $b_1, \ldots, b_t$ が与えられると，y_t の予測値 $\psi_t \in [0,1]$ と予測値 ψ_t に対する賭金 $a_t \in [0, m]$ を出力するものである．ただし，統合アルゴリズムとエキスパートがレース全体で賭けなければならない賭金の総額 M をあらかじめ決めておく．また，統合アルゴリズム A にはあらかじめ系列の長さ T と M を与えておく．統合アルゴリズム A とエキスパート $\mathcal{E}_i$ の時刻 t における損失を，それぞれ，$a_t|\psi_t - y_t|$ と $b_{i,t}|\xi_{i,t} - y_t|$ で表す．ここで，賭金 a_t のうち，$y_t = 1$ という予測に $a_t\psi_t$，$y_t = 0$ という予測に $a_t(1-\psi_t)$ をそれぞれ賭けるものと解釈でき，$a_t|\psi_t - y_t|$ は賭金の損失に等しい．また，事象の系列 $y = (y_1, \ldots, y_T) \in \{0,1\}^T$ に対する A と $\mathcal{E}_i$ の損失を，各時刻におけるそれぞれの損失の総和と定義する．すなわち，$L_A(y) = \sum_{t=1}^{T} a_t|\psi_t - y_t|$，$L_i(y) = \sum_{t=1}^{T} b_{i,t}|\xi_{i,t} - y_t|$．さらに，系列 y に対する最適なエキスパートの損失を，$L_{\mathcal{E}}(y) = \min_{1 \le i \le N} L_i(y)$ で表す．このモデルでは，統合アルゴリズム A の目標は，最適なエキスパートに対する相対的な損失を最小にすることである．すなわち，A の性能は，任意の事象の系列 y に対する最適なエキスパートとの損失の差の最悪値 $\max_{y \in \{0,1\}^T} (L_A(y) - L_{\mathcal{E}}(y))$ で評価する．Cesa-Bianchi らにより提案されたオンライン予測モデルはエキスパートと統合アルゴリズムの出力する賭金がすべて一定，すなわち，任意の $1 \le i \le N$，$1 \le t \le T$ に対して，$a_t = b_{i,t} = 1$ の特別な場合である．ここで，解析を容易にするためにすべてのエキスパート $\mathcal{E}_i$ の賭金の系列が同じ場合，すなわち，総額が $\sum_{t=1}^{T} b_t = M$ であるようなある賭金系列 $b_1, \ldots, b_T$ が存在して，任意の $1 \le i \le N$ に対して $b_{i,t} = b_t$ である場合に限定して議論を進める．このように限定されたモデルを賭金系列共通モデルと呼ぶことにする．まず，任意の予測アルゴリズムの相対的な損失の下界を与える．

定理　賭金系列共通モデルを仮定する．任意の予測アルゴリズム A に対して，ある正整数 T，ある賭金総額 M，ある正数 $m \ge \frac{M}{T}$，あるエキスパートの集合 $\mathcal{E}$，ある賭金系列 $B = (b_1, \ldots, b_T) \in [0, m]^T$ とある事象の系列 y が存在して，$L_A(y) - L_{\mathcal{E}}(y) \ge (1 - o(1))\sqrt{\frac{mM \ln N}{2}}$．ここで，$o(1)$ は T，M と N を大きくするにつれて 0 に向かって減少してゆく量を表す．

次いで，賭金系列共通モデルの下で，Littlestone と Warmuth による重み付き多数決アルゴリズムに基づくほぼ最適で効率の良い統合アルゴリズム P を与える．このアルゴリズムの相対損失の上界は，ある正定数 m が存在して，$mM = \Omega(\log N)$ であり，エキスパートの賭金系列が，M/m 回の予測に対する賭金はちょうど毎回の賭金の限度額 m，それ以外の予測に

対する賭金は 0 であるという場合には，上の定理で示した下界に定数倍の違いを除いて一致する．すなわち，P はほぼ最適なアルゴリズムとなる．P の構成は次の通りである．P は時刻 1 における各予測戦略 $\mathcal{E}_i$の重みを $w_{i,1}=1$ とする．P は，時刻 t における予測 ψ_t として，各予測戦略 $\mathcal{E}_i$ のこれまでの成績を表す重み $w_{i,t}\in[0,1]$ を用いて，予測戦略の予測 $\xi_{i,t}$ の重みつき平均$\sum_{i=1}^{N} w_{i,t}\xi_{i,t}/\sum_{i=1}^{N} w_{i,t}$ を取る．また，時刻 t の予測に関する賭金 a_t として b_t を取る．次に，P は事象 y_t を観測すると，各予測戦略の重みを，損失 $b_t|\xi_{i,t}-y_t|$ に基づいて $w_{i,t+1}=U_\beta(b_t|\xi_{i,t}-y_t|)w_{i,t}$ で更新する．ここで関数 $U_\beta(q)$ は，任意の $q\in[0,1]$ に対して，$\beta^q\le U_\beta(q)\le 1-(1-\beta)q$ を満たす任意の関数で，予測戦略の損失が大きいほど，その重みを大きく減少させる働きをする．また $0<\beta<1$ は，N と M に依存して定まる適当なパラメータである．

定理　賭金系列共通モデルを仮定する．任意の系列長 T，任意の賭金総額 M，任意の毎回の賭金の限度額 $m\ge M/T$，任意の事象の系列 $y\in\{0,1\}^T$，任意のエキスパートの集合 $\mathcal{E}=\{\mathcal{E}_1,\ldots,\mathcal{E}_N\}$ に対して，統合アルゴリズム P の相対的な損失は，$L_P(y)-L_{\mathcal{E}}(y)\le\sqrt{mM\ln(N+1)}+m\ln(N+1)$ となる．

5 実時間ポートフォリオアルゴリズム

投資の対象とする複数の株式銘柄をあらかじめ選んでおき，それらに対する分散投資の戦略を株価の動向から逐次決定するというオンライン分散投資問題に関して，Helmbold らは，株式市場の変動の仕方にいかなる仮定も置かないオンライン分散投資モデルを提案した．このモデルでは，投資戦略の性能は初期資産の減少率で評価され，アルゴリズムの目標は，各銘柄に対して毎回同じ比率で投資をする投資戦略のうち，最適な (損害が最も少ない) ものにほぼ匹敵する資産減少率を達成することである．本研究では，アルゴリズムの目標を，投資期間をいくつかの区間に分割し，区間内では毎回同じ比率で投資をするが，区間毎に異なる比率で投資をするような，より適応的な投資戦略のうち，最適なものにほぼ匹敵する資産減少率を達成することとし，この目標を達成するオンライン分散投資アルゴリズムを与える．

ここで扱うオンライン分散投資モデルは次の通りである．オンライン分散投資アルゴリズム A は N 種類の銘柄 i $(1\le i\le N)$ からなる株式市場に対して T 日続けて分散投資を行なうものとする．A の初期資産 B_1 は丁度 1 とする．投資日 t の各銘柄 i の価格変動は次のように表せる．$x_{t,i}=\frac{\text{第 } t \text{ 日の銘柄 } i \text{ の取引終了時の価格}}{\text{第 } t \text{ 日の銘柄 } i \text{ の取引開始時の価格}}$. $x_t=<x_{t,1},\ldots,x_{t,N}>$ を投資日 t の価格変動ベクトルと呼ぶ．さて，A は投資日 $t-1$ までの各銘柄 i の価格変動ベクトル $x_{1,i},\ldots,x_{t-1,i}$ を参考にして，投資日 t の投資ベクトル p_t を決定し，取引開始時に，その時点で所有する全資産 B_t を分散投資する．ここで，A の投資日 t の投資ベクトル p_t を $p_{t,i}=\frac{\text{第 } t \text{ 日の銘柄 } i \text{ への投資額}}{\text{第 } t \text{ 日の全銘柄への投資総額}}$ を要素とする確率ベクトル $p_t=<p_{t,1},\ldots,p_{t,N}>$ で定義する．ここで銘柄の価格変動については，一般性を失うことなく任意の 投資日 t と任意の銘柄 i について $x_{t,i}\le 1$ と仮定できる．さらに，価格減少率はある定数 $r>0$ で下からおさえられていると仮定する．投資日 t の取引終了後のオンライン分散投資アルゴリズム A の資産 B_{t+1} は $B_{t+1}=(p_t\cdot x_t)B_t=B_t(1/e)^{-\ln p_t\cdot x_t}$ で与えられる．さらに，価格変動ベクトルの系列 $x=(x_1,\ldots,x_T)$ に対する A の最終的な資産 B_{T+1} は $B_{T+1}=B_1\prod_{t=1}^{T}p_t\cdot x_t=(1/e)^{\sum_{t=1}^{T}-\ln p_t\cdot x_t}$ で表される．$x=(x_1,\ldots,x_T)$ に対する A の損失を $L_A(x)=\sum_{t=1}^{T}-\ln p_t\cdot x_t$ と定義する．アルゴリズムの性能の比較対象とする投資戦略を次のように定義する．区間固定投資戦略とは，投資期間をいくつかの区間に分割し，任意の区間 i に対して，ある投資ベクトル $u_0^i=<u_{0,1}^i,\ldots,u_{0,N}^i>$ が存在して，区間 i の任意の投資日 t に対して，投資ベクトル $p_t=u_0^i$ を用いる投資戦略のことである．区間の個数が丁度 L の区間固定投資戦略の損失は，各区間 $1\le i\le L$ で用いる投資ベクトルを $u_0^i=<u_{0,1}^i,\ldots,u_{0,N}^i>$ とすると，$\sum_{i=1}^{L}\sum_{t=t_0^i}^{t_{fin}^i}-\ln u_0^i\cdot x_t$ で表せる．ここで，t_0^i,t_{fin}^i はそれぞれ区間 i の初日と最終日を表す．区間の個数が高々 K 個であるような区間固定投資戦略を K-区間固定投資戦略と呼び，u^K で表す．A の振舞いは，価格変動ベクトルの系列 x に対する A の損失と x に対して損失最小の K-区間固定投資戦略 u^K の損失との差で評価するものとする．A の目標は，任意の価格変動ベクトル x に対して，A の損失 $L_A(x)$ と損失最小の K- 区間固定投資戦略の損失 $L_{u^K}(x)$ との差すなわち，$\max_x(L_A(x)-\min_{u^K}L_{u^K}(x))$ を最小にすることである．

以下に，オンライン分散投資アルゴリズム A_{track} の概略を述べる．A_{track} は，各銘柄 i の投資日 $t-1$ までの出来を表す重み $w_{t,i}$ を $p_{t,i}=\frac{w_{t,i}}{\sum_{j=1}^{N}w_{t,j}}$ のように規格化し，投資日 t における投資ベクトル p_t として出力する．A_{track} は，その日の価格変動ベクトル x_t が決まると，各銘柄 i の重みを $w_{t+1,i}=w_{t,i}\exp\left((-\eta)\left(1-r\frac{x_{t,i}}{p_t\cdot x_t}\right)\right)+\alpha\Delta_t/N$ で更新する．ここで，$\Delta_t=\sum_{i=1}^{N}w_{t,i}\left(1-\exp\left((-\eta)\left(1-r\frac{x_{t,i}}{p_t\cdot x_t}\right)\right)\right)$ は，Blum らにより導入されたもので区間固定投資戦略を追跡するための仕組みである．また，$\alpha\in[0,1/2]$ は T,N,r に依存して決まる適当なパラメータである．

定理　任意の実数 $0<r<1$，任意の銘柄数 N，任意の投資期間 $T\ge 2^5\ln\frac{N}{(1-r)(1-1/e)}$，任意の正整数 K，任意の K-区間固定投資戦略 u^K，任意の価格変動ベクトルの系列 $x=(x_1,\ldots,x_t)\in[r,1]^{N\times T}$に対して，$p_1$ を一様分布としパラメータ α と学習パラメータ η をそれぞれ$\alpha=\sqrt{\frac{1}{4T}},\eta=\sqrt{\frac{8}{T}\ln\frac{N}{\alpha(1-r)(1-1/e)}}$ と置くと，A_{track} の損失は

$L_{A_{track}}(x)\le L_{u^K}(x)+\frac{\sqrt{2}(K+3)}{2r}\sqrt{T\left(\frac{1}{2}\ln 4T+\ln\frac{N}{(1-r)(1-1/e)}\right)}$. となる．

6 結論

第 6 章は本論文の結論であり，本研究によって得られた結果について総括した．

論文審査の結果の要旨

学習は，大量のデータからその背景にある規則を帰納推論する過程とみなすことができる．膨大なデータの蓄積が様々の分野で進み，その中から意味のあるデータを抽出することが益々重要となっているにもかかわらず，推論のメカニズムの本質はいまだ解明されていない．本論文は，推論に要する時間も考慮に入れて推論過程をモデル化し，逐次生起する事象の実時間予測や分散投資の実時間決定のためのアルゴリズムを設計したもので，全編6章より成る．

第1章は序論である．

第2章では，近似学習のモデル，実時間予測モデル，および実時間決定モデルについて説明するとともに，本論文と関連するこれまでの研究の展開について述べている．

第3章では，仮説の良さを，従来の仮説の誤り率に代り，仮説により学習対象に関して獲得される情報量により新しく定式化し，これがより合理的なものであることを示すとともに，弱情報獲得アルゴリズムを強情報獲得アルゴリズムに変換するメカニズムを与えている．これは，優れた成果である．

第4章では，情報源から逐次生起する事象を実時間で予測する問題を取り上げ，エキスパート集団からの個々の予想を統合して自らの予測を出力するアルゴリズムを与えている．予測値の他に予測の確信度を表すパラメータを新しく導入し，最適なエキスパートと同等の予測をミニマックス戦略に基づき出力するアルゴリズムの他，重み付き多数決を用いて，エキスパートの予測の統合を実時間で実行する効率の良いアルゴリズムを与えて，その性能を評価する式を導出している．

第5章では，日々株価が変動する株式銘柄に分散して投資する金額を逐次決定する問題を取り上げ，初期投資額が最終的にどれだけ目減りするかで分散投資を評価する観点からこの問題を定式化している．この定式化に基づき，資産の目減りが最適な分散投資と同じ程度に抑えられる実時間分散投資アルゴリズムを与え，その性能を評価する式を導出している．

第6章は結論である．

以上要するに本論文は，相互情報量に基づき情報獲得の概念を新しく提案するとともに，実時間予測や分散投資の実時間決定のためのアルゴリズムを与え，これらのアルゴリズムの性能を評価する式を導出したもので，情報基礎科学の進展に寄与するところが少なくない．

よって，本論文は博士 (情報科学) の学位論文として合格と認める．