氏名（本籍）	正宗　淳（岡山県）
学位の種類	博士（情報科学）
学位記番号	情博第129号
学位授与年月日	平成11年9月9日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
研究科，専攻	東北大学大学院情報科学研究科（博士課程）システム情報科学専攻
学位論文題目	Selfadjointness of Laplacians and conservativeness of the Brownian motion on a Riemannian manifold with fractal boundary（フラクタルな境界をもつリーマン多様体のラプラシアンの自己共役性とブラウン運動の保存性）
論文審査委員	（主査）東北大学教授　浦川　肇　東北大学教授　海老沢　丕道　東北大学教授　日合　文雄　東北大学教授　金子　誠

論文内容要旨

ブラウン運動は，1827年英国の植物学者ブラウンが水に浮かんだ花粉の極めて不規則な運動を発見することにより見出された．1905年にアインシュタインがブラウン運動の分布が拡散過程になることを明らかにすると，レヴィやウイナー等はブラウン運動のモデルを数学的に定式化した．彼らの仕事以降，ブラウン運動とそれの離散版であるランダムウオークの理論は確率論の中心的話題として発展を続け，数学や物理学の分野だけに留まる事なく今日では統計学，ニューラルネットワークの理論やファイナンスの理論など情報理論においても重要な位置を占めている．ランダムウオークやブラウン運動の軌跡は非常に複雑な図形を描き，それらは非正数次元をもつことが知られている．このような非正数次元をもつ集合の定式化は1970年代にマンデルブローによりなされ，フラクタルと命名された．最初のフラクタルの例は，ポアンカレの三体問題の研究中に見い出され，その後ハウスドルフはカントール集合やコッホ曲線の研究をしているが，長い間それらは例外的であるとか，病的であるとされてきた．マンデルブローは，そのような図形が実は自然界のモデルとして重要であることを多くの興味深い例を用いて指摘し，それをきっかけに

一躍フラクタルは多くの分野に浸透していき，盛んに研究されるようになった．特に，情報理論においては，情報そのものが本質的に「あいまいさ」を含むことにより，その研究のモデルとしてフラクタル，カオス，ファジーなどは重要である．数学的にもフラクタル上の解析は非常に重要なテーマであり，例えば，最近では最も基本的な物理現象である拡散過程や波動関数のフラクタル上での研究など興味深い研究がなされており，それらの研究のより一層の研究が期待される．特に，我々が研究の対象とするリーマン幾何学においては「フラクタルドラムの音を聞き分けられるか？」などの非常に興味深い問題が活発に研究されている．

しかしながらリーマン幾何学におけるこれまでのフラクタルの研究はリーマン計量がフラクタル集合まで延びる場合に限られている．一方，ブラウン運動の理論はラプラシアンの幾何と密接に関係し古来，様々な研究がなされており，この分野の研究も広範に渡るが，それらの研究は主に完備リーマン多様体上のものである．即ち，代数多様体，佐竹のＶ多様体などの数学的に非常に自然で重要な対象や，一般性相対論のモデルでもある特異集合を持つ多様体上では研究は少なく，特に特異集合がフラクタルの場合の研究はなされていない．

本論文の目的は，ブラウン運動の理論をフラクタル境界を持つリーマン多様体上に発展させることにある．先に述べたように，この分野の研究はたいへん広範であるが，本論文では，リーマン幾何学におけるこの理論の最も基本的で重要と思われる次の３つの問題を考察することにした．

(1) ブラウン運動の一意性と再帰性の問題．
(2) ラプラシアンの本質的自己共役性の問題．
(3) ラプラシアンの固有値の振る舞いを調べる問題．

この論文は，５章から成る．第１章は序文である．第２章は本論文で用いる定義や概念をまとめる．第３章で（１）の内容を，第４章で（２）の内容を，第５章で（３）の内容をそれぞれ扱う．ここで,（１）に関して得られた結果は，グリゴリアンが完備なリーマン多様体の場合に示しており，それの拡張になっている.（２）に関して得られた結果は，長瀬やリー・ティアンが代数多様体の場合に示しており，それらの結果の拡張になっている.（３）に関する研究はリマ・ロスマンの研究に端緒をもつものである．以下，各章の内容について順を追って簡単に述べることにする．

第１章

この章は序文である．我々が考える問題の背景を述べる．

第２章

この章は準備である．§１から§４までに，本論文に必要な定義と概念を主にブラウン運動に関するものをまとめる．§４でブラウン運動の保存性と再帰性の定義を与える．§５でブラウン運動の保存性と再帰性のための十分条件を述べる．我々は第３章でこれらの十分条件に帰着させることで，フラクタルな境界をもつリーマン多様体上のブラウン運動の一意性と再帰性を示す．§６では，これまでに知られている非完備リーマン上のブラウン運動の保存性と再帰性の結果を述べる．我々の研究はここで述べる研究の延長線上に位置するものである．§７でラプラシアンの本質的自己共役性の定義を与え，ギャフニーの定理を紹介する．ギャフニーの定理はラプラシアンが本質的自己共役である為の十分条件を与えるが，我々は第４章においてギャフニーの定理に帰着させることでラプラシアンの本質的自己共役性を示す．§８でリーマン多様体 M に対してそれの完備化 $\overline{M}$ と M の差集合 $\overline{M} \setminus M$ で M のコーシー境界を定義し，$\overline{M}$ 上に容量を定義する．特にリーマン多様体の特異集合は，コーシー境界である．本論文を通して，コーシー境界の容量が０であることが重要であるが，コーシー境界の容量が０であるとき，それは概極集合であると言う．§９と§１０で，ラプラシアンのスペクタルの離散性の定義を与える．更にラプラシアンの固有値を評価する２つの公式，ワイルの固有値の漸近公式とチェン・リーの公式を紹介する．

第３章

この章に於いてブラウン運動の一意性と再帰性をフラクタル境界をもつリーマン多様体で考察する．我々の方法を以下で説明する．

「ブラウン運動の一意性」と「吸収壁ブラウン運動の保存性」が同値であることに注意して，吸収壁ブラウン運動の保存性の十分条件をさがす．まずブラウン運動のこれらの問題をディリクレ形式の問題に還元して，一旦そこでソボレフ空間の議論をすることで，「コーシー境界が概極なら，吸収壁ブラウン運動と反射壁ブラウン運動が一致する」を示す．次

にコーシー境界がコンパクトでそれの半径 R の近傍の体積 $V(R)$ が

$$\text{(C)} \quad \int^{\infty} \frac{R}{\log V(R)} dR = \infty$$

を満たすなら，反射壁ブラウン運動が保存的であることを示す．さらに，$V(R)$ が

$$\text{(R)} \quad \int^{\infty} \frac{R}{V(R)} dR = \infty$$

を満たすなら，反射壁ブラウン運動が再帰的であることを示す．そうすると，はじめに注意したことにより次を得る．

定理 コーシー境界がコンパクトな概極集合であるとする．さらにコーシー境界の半径 R の近傍の体積 $V(R)$ が条件 (C) を満たすなら，ブラウン運動の一意性が成立する．更に，$V(R)$ が条件 (R) を満たすなら，ブラウン運動は再帰的である．

さらに，この結果を用いて，次のことを示した：コーシー境界がコンパクトな概極集合であるとする．ここでコーシー境界の半径 R の近傍の体積 $V(R)$ が条件 (C) を満たすなら，コンパクトな台を持つ滑らかな関数 u_0 に対し，

$$\int_M u_t(x)\, dx = \int_M u_0(x)\, dx$$

が成立する．ただし，u_t は初期関数を u_0 にもつ熱方程式の有界な解であり，t は任意の正の数とする．

第４章

この章に於いて，ラプラシアンの本質的自己共役性を考察する．本質的自己共役性は定義域の選び方に依存するが，我々は２つのラプラシアン，はじめに，ギャフニーにより研究されたラプラシアン Δ，続いてコンパクトな台を持つ滑らかな関数全体を定義域にもつラプラシアン Δ_0 を調べる．本章において「コーシー境界が概極であればラプラシアン Δ は本質的自己共役である」を示す．一方，Δ_0 に関しては「Σ を完備リーマン多様体 M の閉部分多様体とするとき，非完備リーマン多様体 $M \setminus \Sigma$ 上のラプラシアン Δ_0 が本質的自己共役である為の必要十分条件は，Σ の余次元が４以上である」という結果を得た．

以上の議論においてコーシー境界が概極であることが重要である．我々はさらに，コーシー境界が概極であることを代表的なフラクタル次元で

あるところのミンコフスキー次元を用い，「コンパクトなコーシー境界は，それのミンコフスキー次元が2より大きければ概極である」という定理を得た．

以上の結果を用いて，熱方程式の有界な解の初期関数に関する一意性が成立するが，他方，熱方程式の非有界な解が連続濃度存在するという興味深い非完備リーマン多様体の例を得た．

第5章

この章では，コンパクトリーマン多様体の場合に知られているワイル型の漸近公式とチェン・リー型の評価式を次のような特異集合を持つリーマン多様体の場合に示す．2次元以上のコンパクトリーマン多様体Mから余次元が2以上の閉部分多様体Σを取り除いた非完備リーマン多様体について，$M \setminus \Sigma$上の滑らかな関数を用いて変形したリーマン計量を考える．本章では初めに，この特異点を持つリーマン多様体のラプラシアンのスペクトルが離散になる十分条件を与えた．次にソボレフの不等式が成立する場合に，各固有値の下からの評価を与えるチェン・リー型の評価式を示し，そのことを用いて固有値の番号が大きくなるときの漸近挙動を表すワイル型の漸近公式を得た．

以上の研究をまとめると，我々はコーシー境界が概極であればブラウン運動の一意性と再帰性，ラプラシアンの自己共役拡張の一意性が成立することを示した．この結果，フラクタル次元と確率論の概念で統一的に論じることできることが明らかになった．また特異集合をもつリーマン多様体において，ワイル型の漸近公式とチェン・リー型の固有値の評価式を示し，これによって，このような場合おいても，体積などの「幾何的な量」とラプラシアンの固有値という「解析適な量」が結びつくことを明らかにした．

論文審査の結果の要旨

ブラウン運動やフラクタルは科学の様々な分野において用いられる重要な概念であることが認識されるようになったが、とりわけ、ブラウン運動の生成作用素であるラプラシアンの理論は重要である。しかしながら、フラクタルな境界をもったリーマン多様体上のラプラシアンとブラウン運動の研究は従来なされていなかった。本論文は初めてこのような特異集合をもったリーマン多様体上のラプラシアンの大域解析の研究を体系的に行ったもので、全編5章よりなる。

第1章は序論である。問題の背景を述べている。

第2章は準備である。本論文において必要となる種々の概念、特に、熱核、ソボレフ空間、ブラウン運動、確率的完備性、再帰性、ラプラシアンの自己共役性、コーシー境界、容量などを述べ、これまでに知られている最新の知見の解説をしている。

第3章では、始めに特異集合をもったリーマン多様体上に2つのソボレフ空間、すなわち、関数の台がコンパクトの場合のソボレフ空間と1回微分が2乗可積分である場合のソボレフ空間とを考え、この2種類のソボレフ空間が同一となるための必要十分条件がコーシー境界と呼ばれる特異集合の容量が0となることを示している。このことを用いてラプラシアンの大域解析の研究で基本となる自己共役性が成り立つためには上記のコーシー境界の容量が0であれば良いこと、すなわち、ブラウン運動がコーシー境界をヒットしないことであることを明らかにした。更にコーシー境界の容量が0で、コンパクトのときには、コーシー境界からの距離円の体積増大度によって、ブラウン運動の保存性と再帰性とをそれぞれ特徴付けた。これは重要な成果である。

第4章では、コーシー境界の容量が0となることがどのようなときに起こるかを明らかにしている。コーシー境界が（1）コンパクトなフラクタル集合のときはそのミンコフスキー余次元が2より大、（2）コーシー境界が滑らかのときは、2以上、のどちらか一方であれば、コーシー境界の容量が0となることを示した。この評価は最良である。これらの結果は境界がフラクタルのように複雑であっても、コーシー境界が3次元の物体中の1次元の滑らかな曲線かフラクタル次元が1より小であれば、ブラウン運動がコーシー境界をヒットせず、ラプラシアンの自己共役性が成り立ち解析できることを示したものであり、注目される結果である。

第5章では、第3、4章の成果を用い、2次元以上のコンパクトリーマン多様体から余次元が2以上の閉部分多様体を取り除いてできるリーマン多様体の計量を変形して、ラプラシアンのスペクトルが離散的になる条件を与え、各固有値の下からの評価と、番号が大きくなるときの漸近挙動を与える公式を与えた。コンパクトリーマン多様体の場合にはこれらの公式が成立することは良く知られているが、閉部分多様体を取り除いてできる上記の多様体は非コンパクトでかつ非完備であり従来の理論を適用することは全くできない。本論文により、初めて得られた成果であり、注目される結果である。

以上要するに本論文は、フラクタルなど特異集合をもったリーマン多様体上のラプラシアンの大域解析の研究の基礎理論を構築し、その上のブラウン運動の保存性、再帰性を論じ、これまでの理論からは予想すらできなかったスペクトルの離散性、およびその漸近公式を得て、その理論の有効性を示している。これらの研究成果はシステム情報数理学と情報科学の発展に寄与するところが少なくない。

よって本論文は博士（情報科学）の学位論文として合格と認める。