氏 名 (本籍)	さとう あきひろ 佐 藤 彰 洋　(大 阪 府)
学位の種類	博 士 (情報科学)
学位記番号	情 博 第 190 号
学位授与年月日	平成 13 年 3 月 26 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当
研究科、専攻	東北大学大学院情報科学研究科 (博士課程) システム情報科学専攻
学位論文題目	ランダム乗算過程の統計的性質とその応用
論文審査委員	(主 査) 東北大学教授 沢田 康次　東北大学教授 堀口 剛 東北大学教授 海老澤 丕道

論文内容要旨

1 緒言

ランダム乗算過程の研究分野は, 近年の複雑系の観点から重要視されてきている. 複雑系の研究分野は横断的であり, 工学, 物理学, 生物学, 経済学など様々な分野からなっている. この複雑系に対する研究手法のひとつとして, 系のもつ間欠性に着目した研究があげられる. これまで, 間欠性に関する研究はカオス研究から派生した写像系による研究が中心で, 確率過程論からの研究は行われておらず, その解明が待たれていた.

ランダム乗算過程とは, 元来非線形に起因するシステムの局所リアプノフ指数のゆらぎを, 乗算的に働くノイズとみなした, 乗算と加算のふたつのノイズを持つ確率過程である. ランダム乗算過程は近年, 結合写像系 [1] や, 乱流中の高分子の運動 [2], 経済現象の価格変動問題 [3] などへと, その応用範囲が広がってきている. 本稿ではランダム乗算過程の統計的性質を明かにし, 複雑系のひとつとして, 価格変動問題への応用について述べる.

2 ランダム乗算過程

2.1 離散時間パラメーターを持つランダム乗算過程

離散時間パラメータを持つランダム乗算過程とは, 次の離散的な時間パラメータ $s(s=0,1,\ldots)$ によって与えられる確率過程である [4].

$$x_{s+1} = b_s x_s + f_s \tag{1}$$

ここで, b_s を**乗算ノイズ** (multiplicative noise), f_s を**加算ノイズ** (additive noise) と呼ぶ. 乗算ノイズの絶対値 $|b_s|$ が 1 以下のとき, $|x_{s+1}|$ は $|x_s|$ より小さくなりやすい (**減衰**). 反対に $|b_s|$ が 1 以上のとき, $|x_{s+1}|$ は $|x_s|$ より大きくなりやすい (**増幅**). また, 乗算ノイズ b_s が負のとき x_{s+1} と x_s とは反対の符号になる. すなわち, x_s の時系列は振動する. 減衰と増幅を表. 1 に分類する. 乗算ノイズ b_s が常に 1 以上だと, x_s の系列はどんどん大きくなり, ついには発散して

表 1: 乗算ノイズ b_s の値とその意味.

$0 < b_s < 1$	減衰
$-1 < b_s < 0$	減衰 (振動)
$b_s > 1$	増幅
$b_s < -1$	増幅 (振動)

しまうことは明らかである. しかし, b_s が 1 以上になることと, 1 以下となることが混在している場合, x_s の系列は発散せず, しかも, その確率密度関数はべき則に従う. ここで, べき則に従うとは確率密度関数 $p(x)$ が

$$p(x) \propto |x|^{-\beta-1}, \tag{2}$$

のように書き表されることを意味する. β は**べきの指数** (power law exponent) と呼ばれ, $\beta > 0$ である. 乗算ノイズが白色ノイズの場合, べき指数 β は,

$$\langle |b|^{\beta} \rangle = 1, \tag{3}$$

により与えられることを示した. (3) 式の左辺は, 乗算ノイズ $\{b\}$ の β 次のモーメントを表しており, 乗算ノイズの統計的性質によって, べきの指数が決ることを表わしている. また, 自己相関関数は

$$R_m = \frac{\langle f^2 \rangle}{1 - \langle b^2 \rangle} \langle b \rangle^m \tag{4}$$

で与えられる.

2.2 連続時間パラメーターを持つランダム乗算過程

連続時間パラメータをもつランダム乗算過程は, 次の 2 種類のノイズを持つ線形確率微分方程式

$$\frac{dv}{dt} = \nu(t)v(t) + \xi(t), \tag{5}$$

によって定式化される [5]. ここで, $v(t)$ は関心のある変数, $\nu(t)$ は**乗算ノイズ** (multiplicative noise), $\xi(t)$ は加算ノイズ (additive noise) である. $\nu(t) > 0$ の場合, $v(t)$ は原点から離れる方向に進むので, **増幅**の効果をもつ. 反対に $\nu(t) < 0$ の場合, $v(t)$ は原点に近づく方向に進むので, **減衰**の効果をもつ. 常に原点から離れる方向に進むばかりだと, ついには $v(t)$ の値は発散してしまうが, 確率的に原点に近づく方向にも進むので値は発散しない. $\nu(t)$ の値とその意味を表. 2 にまとめる.

表 2: 乗算ノイズ $\nu(t)$ の値とその意味.

$\nu(t) > 0$	$v(t)$ は原点から離れる方向に進む (増幅)
$\nu(t) < 0$	$v(t)$ は原点に近づく方向に進む (減衰)

簡単化のため, 乗算ノイズと加算ノイズはともに, 以下の**白色 Gauss ノイズ** (Gaussian white noise)

$$\langle \nu(t) \rangle = \bar{\nu}, \tag{6}$$

$$\langle [\nu(t_1) - \bar{\nu}][\nu(t_2) - \bar{\nu}] \rangle = 2D_\nu \delta(t_1 - t_2), \tag{7}$$

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \tag{8}$$

$$\langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle = 2D_\xi \delta(t_1 - t_2), \tag{9}$$

であると仮定する. ここで $\bar{\nu}$ は乗算ノイズの平均値, D_ν はその強度を表す. また D_ξ は加算ノイズの強度である.

Storatonovich 積分により (5) 式の確率微分方程式を離散化し, 離散時間パラメーターを持つランダム乗算過程

$$v(t_{i+1}) = \exp(\Delta W_i)v(t_i) + \frac{\Delta V_i}{1 - \Delta W_i/2}. \tag{10}$$

に帰着した. そして, べき指数 β に着目し, 乗算ノイズとべき指数 β との関係を導出し,

$$\beta = -\frac{\bar{\nu}}{D_\nu}. \tag{11}$$

を得た. この式はべき指数 β が乗算ノイズの強度と平均値の比によって与えられることを表している.

3 価格変動問題への応用

為替や株価の価格は日々めまぐるしく変化している. しかし, 市場価格がなぜゆらぐのかという問題は実は難しい問題である. そもそも価格とは売り手と買い手の 2 者関係に依存して決るものであり,2 者間で取引をしている限りでは価格はゆらぐことはない. ところが, この 2 者間で決まった価格が多数集り, 参照されあうことによって市場価格が形成され, しかもゆらぎが起る. 市場価格差の確率密度関数がべき則に従うことが Mantegna ら (1995) によって指摘されている [6]. このゆらぎのメカニズムを数理モデルのミクロな視点からランダム乗算過程を通じて明かにする.

3.1 ディーラーモデル

市場メカニズムと**ディーラーの振舞い**との相互作用のモデル化についてその概念を述べる [3]. このようなモデルによるアプローチを, **ディーラーモデルアプローチ**と呼ぶことにする. モデルの概念図を図. 1 に示す. ディーラーは, 仮想的な市場環境に対して行動として, 売り買い注文とその希望価格を出す. そして, その出された複数の売り買い注文か

ら, 市場価格が決定される. 市場価格を決定する市場モデルは競争売買を採用することにする. 次に, 決定された市場価格のトレンドをもとに, ディーラーは次の売り買い注文の希望価格を変更する. この操作を繰り返すことで, 市場価格が逐次的に決定されていく. まず, ディーラーモデルを**市場モデル** (market model) と**ディーラーアルゴリズム** (dealer algorithm) に分解する. すると, 市場モデルとはディーラー間の注文の適合を介在し, 市場価格を決定する仕組と理解される. この仕組はきわめて非線形性の高く, 大域化の仕組も合せ持つ. 他方, ディーラーアルゴリズムとは, 個々のディーラーの振舞いがどのようであるかを記述したものである. すなわち, 非線形な大域化メカニズムが市場モデルに, 局所要素がディーラーアルゴリズムに対応する.

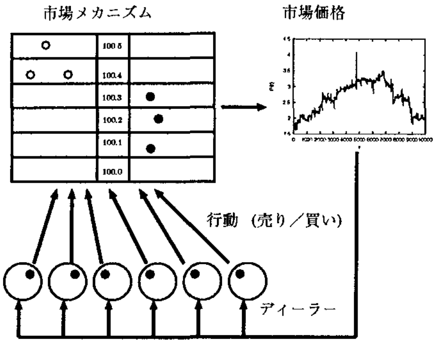

図 1: ディーラーモデルの概念図. ディーラーは売りと買いの注文を市場に出し, それらの注文から市場価格が決定される. そして市場価格の推移から各ディーラー群は次の行動を決定する.

3.2 市場モデル

我々が日常行っている" もの" を売り買いする行為を考えてみよう. もし, 利益のでる売買をしたいと望むのなら, 買った値段より売る値段を高く設定するだろう. ということは, 一般にある瞬間では個人の頭のなかでは売値の方が買値より高いことになる. また, 2 人で売り買いを交渉で決める場合を考えてみよう. 交渉が成立するのは, 買い手の言い値のほうが売り手の言い値より高いときである.

これを一般化して, ある i 番目のディーラーの売値 S_i, 買値 B_i とすると, 売値より買値のほうが高いので $S_i > B_i$ と書き表すことができる. いま簡単化のために, 全てのディーラーの売値と買値の差

$$\Lambda \equiv S_i - B_i, \tag{12}$$

はディーラーによらず, 一定であると仮定する.

2 者間での売買の場合, 買い手をディーラー i, 売り手をディーラー j とすると, 取引がこの 2 者間で成立するための条件は,

$$B_i - S_j \geq 0 \tag{13}$$

である.

これを図. 2 のような, N 人のディーラーがいて単一銘柄の株を, 個別競争売買によって取引している場合を考える. 個別競争売買を考えているので, 売り値の最大値と買い値の最小値が取り引き条件を満たすとき, この市場で売買が成立する. 更に, 取り引きは 1 ステップに 1 取り引きしか生じないと仮定する.

そうすると, この市場で取引が発生する条件は, 最大の買値 B と最小の売値 S に対して (13) 式が成り立つときである. すなわち,

$$\max\{B\} - \min\{S\} \geq 0 \tag{14}$$

と書き下される. ここで, $\max\{B\}$, $\min\{S\}$ はそれぞれ, 市場に注文されている最大買値と最小売値を表す.

取引が成立したときにだけ価格 $P(t)$ が決まり, この価格が市場価格となるので, 次の取引が成立するまでは, 寸前に決定された市場価格が保たれることになる. 簡単化のため, 市場価格は売値と買値の平均値で決ると仮定する. よって, 市場価格 $P(t)$ は次式で与えられる.

$$P(t) = \begin{cases} P(t-1) & \Big(\max\{B\} < \min\{S\}\Big) \\ \frac{1}{2}\Big(\max\{B\} + \min\{S\}\Big) & \Big(\max\{B\} \geq \min\{S\}\Big) \end{cases} \tag{15}$$

この式は, 市場価格が取引が起ったときだけ変更されることを意味する.

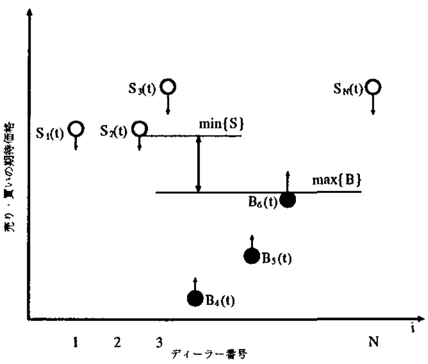

図 2: 市場での売り買い注文の概念図. N 人のディーラーによって合計 N 個の注文がなされている.

3.3 ディーラーアルゴリズム

再び, 簡単な 2 人での売り買いを考えてみる. 交渉では相手の出方を見ながら売り値, 買い値を交互に出しあい, お互いに納得のいく値段で交渉が成立する. このとき, 売り手は提示した価格を相手に納得さることができないなら, 値段を下げていくであろう. 反対に買い手は, 値段を上げていくことになる. このことから, **売り手は手持ち株を売ることができるまで売り値を下げ続け, 買い手は株を入手できるまで買値を上げ続ける**と仮定することができる. また, 各ディーラーは次のルールに従い買値 (売値) を更新する.

$$B_i(t+1) = B_i(t) + a_i(t) + c\langle\Delta p\rangle_T \tag{16}$$

ここで, $\langle\Delta p\rangle_T$ は市場価格の Ttick 間の平均トレンドを表し,

$$\langle\Delta p\rangle_T = \frac{1}{T}\sum_{s'=1}^{T}\Delta p_{-s'} \tag{17}$$

で与えられる. また,$\Delta p_{-s'}$ は現在から見て s'tick 前の価格差である. この式の意味は, 以前の Ttick 間の価格のトレンドの平均値を考え, その平均値が値上がりしているなら, 付け値を上げぎみに修正し, 反対に値下がりぎみなら付け値を下げぎみに修正することを表わす. 売り手の場合は売れるまで自らの希望価格を下げ続け, 買い手の場合には買えるまで希望価格を上げ続けると仮定しているので, $a_i(t) < 0$ のとき売り手, $a_i(t) > 0$ のとき買い手を意味する. すなわち, $a_i(t) < 0$ のとき $B_i(t) + \Lambda$ を希望売値とし, 反対に $a_i(t) > 0$ のとき $B_i(t)$ を希望買値とする.

今, どのディーラーも資産は少く, 売り手の次は買い手に, 買い手の次は売り手に立場を変えなければならないと仮定する. このとき, $a(t)$ の更新は次のように書くことができる.

$$a_i(t+1) = \begin{cases} -a_i(t) & (i\text{ が取引に参加した}) \\ a_i(t) & (i\text{ が取引に参加しなかった}) \end{cases} \tag{18}$$

3.4 初期値とモデルパラメータ

ディーラーモデルの変数は, 各ディーラーに買値 $B_i(t)$[1] と変更量 $a_i(t)$ の 2 つの変数があるので,N ディーラーが取引する市場では $2N$ 個の変数が存在する. また, 市場の変数として, 市場価格 $P(t)$ と過去の取引での市場価格の差 Δp_s がある. これらの初期値を以下のようにして与える. ディーラーには違いを生じさせる目的で, $B_i(0)$, $a_i(0)$ をそれぞれ $[-\Lambda/2, \Lambda/2]$, $[-\alpha, \alpha]$ の一様乱数で与える. また, 最初市場には市場価格の過去の情報は一切ないと仮定し, 市場価格の初期値と, 価格差の初期値をを 0 とする. すなわち, $P(0) = 0$, $\Delta p_s = 0 \quad (s = \ldots, -2, -1, 0)$ である. このモデルの推移に, 確率的な要素は全くなく完全に決定論的である.

また, モデルパラメータはディーラー数 N, $a_i(t)$ の初期ゆらぎを決める α, 売値と買値の差 Λ, 過去の価格変化の量 $\langle\Delta p\rangle_T$ の影響を表わす c, トレンドを計算する tick 数を与える T の 5 つである.

3.5 確率過程の導出

図. 3 に示すように, s 回目の取引による価格変化を Δp_s, $s-1$ 回目の取引と s 回目の取引との間のステップ数を n_s と表記する. 簡単のために $T=1$ の時を考えることにする. そうすると $\langle\Delta p\rangle_1 = \Delta p_{s-1}$ である. (16) 式より, $s-1$ 回目の取引から s 回目の取引の間, 全てのディーラーの希望価格に対して $c\Delta p_{s-1}$ が加算される.

[1] 売値 $S_i(t)$ は $S_i(t) = B_i(t) + \Lambda$ で与えられるので, 買値 $B_i(t)$ だけを考えるれば十分である.

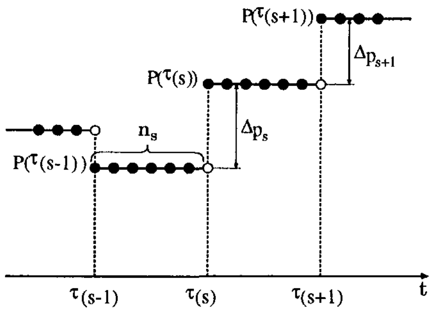

図 3: 市場価格 $P(t)$ の時間発展の概念図. $\tau(s)$ は s 回目の取引の発生した時間を, Δp_s はそのときの価格のジャンプを表わす. n_s は $s-1$ 回目の取引から s 回目の取引までのステップ数である.

よって, n_s ステップ間には $cn_s\Delta p_{s-1}$ が全てのディーラーの希望価格に加えられることになる. そして, この変化量 $cn_s\Delta p_{s-1}$ は次の価格変化 Δp_s に含まれていなければならない. 一方, 数値シミュレーションから $c=0$ においてもゆらぎが存在することがわかるので, これを ϕ_s と表記すると, ϕ_s は $c\Delta p_{s-1}$ の項とは独立に Δp_s に含まれる必要がある. これより, 価格変化に対して, 次の関係が成り立つ.

$$\Delta p_s = cn_s\Delta p_{s-1} + \phi_s \tag{19}$$

ディーラーモデルの推移は, 完全に決定論的なので, n_s, ϕ_s の値も決定論的に決る. より一般にディーラーが T tick 過去のトレンドを計算する場合を考えてみる. そのとき Δp_{s-1} を価格差の時間平均 $\langle\Delta p\rangle_T$ と置き換えればよい. 価格差の時間平均とは, $\langle\Delta p\rangle_T = \frac{1}{T}\sum_{s'=1}^{T}\Delta p_{s-s'}$ のことなので,

$$\Delta p_s = cn_s\frac{1}{T}\sum_{s'=1}^{T}\Delta p_{s-s'} + \phi_s \tag{20}$$

が一般の価格差に対する発展方程式である. この方程式は離散時間パラメーターを持つランダム乗算過程であり, この方程式から価格差の確率密度関数がべき則に従うことを説明することができる.

4 結論

離散時間パラメーターを持つランダム乗算過程と, 連続時間パラメーターを持つランダム乗算過程と定式化し, その統計的性質を述べた. そして, 価格変動問題を定義し, 多数のディーラーを含む価格変動の数理モデルを導入した. 今後, 商取引の電子化にともない, 取引の自動化が進展していくことが予想される. このような場面でディーラーを考慮したモデルは重要な役割を果すと考えられる. 本論文では複雑系として価格変動問題を取り上げたが, 今後, ランダム乗算過程が複雑系の他の問題にも応用されていくと思われる.

参考文献

[1] Y. Kuramoto and H. Nakao, Physical Review Letters, Vol. **76** (1996) p. 4352.

[2] J.M. Deutsch, Physical Review Letters, Vol. **69** (1992) p. 1536.

[3] A.-H. Sato and H. Takayasu, Physica A, Vol. **250** (1998) p. 231.

[4] H. Takayasu, A.-H. Sato and M. Takayasu, Physical Review Letters, Vol. **79** (1997) p. 966.

[5] H. Nakao, Physical Review E, Vol. **58** (1998) p. 1591.

[6] R.N. Mantegna and H.E.Stanley, Nature, Vol. **376** (1995) p. 46.

論文審査の結果の要旨

近年の決定論的非線形力学の研究の発展により複雑な時系列の研究が進展を見せたが、システムの自由度が多くなると確率論的手法がより効果的となる。著者は元来局所リアプノフ指数のゆらぎを持つ非線形システムの代りに乗算ノイズと加算ノイズを持つランダム乗算過程という線形確率システムの詳細な研究を進め、この系の持つ普遍的性質を導いた。また、複雑系の対象として経済現象の価格変動を取り上げ、ランダム乗算過程と比較することによってこの現象の持つ特徴づけを行った。本論文はこれらの成果をまとめたもので全編6章からなる。

第1章は序論であり、研究の動機について述べている。

第2章では、関連するこれまでの研究を示し、本論文の位置付けを行って、本研究の目的を明かにしている。

第3章では、離散力学ランダム乗算過程の統計的性質について、乗算ノイズが白色の場合と、有限時間の相関を持つ場合に対して、変数振幅の構造とその時間変化についての統計的性質を議論している。振幅構造として確率密度関数がべき則に従うことに着目し、べき指数と乗算ノイズとの関係を明かにしている。 また、時間構造としては、ラミナー間隔の分布が-3/2を指数とするべき則を示すこと、また自己相関関数が非定常の場合でも時間構造を調べる方法として、ラミナー間隔の分布が有用であることを見いだしている。これらは有用な成果である。

第4章では、まず、乗算ノイズが白色ガウスノイズの場合の連続力学ランダム乗算過程に対する理論的な研究を行い、離散力学ランダム乗算過程との関係を明らかにしている。次いで、真の連続力学系であるアナログシミュレーターを製作して測定した実験結果から得られた出力電圧の確率密度がべき乗分布を示し、その指数は乗算ノイズの平均値に比例することを示しモデルとの関連を議論している。

第5章では、複雑な時系列の実例としての価格変動の性質を明らかにする目的で、外国為替(円/ドルレート)の統計的性質を解析し、価格変動の確率密度がべき的な振舞いを示すことを見出している。つづいて売買メカニズムを考慮したディーラーモデルを提案し、数値シミュレーションから、このモデルの価格差がべき的振舞いを呈することを示している。 また、ディーラーモデルの価格差に着目した発展方程式を導出し、その方程式が与える時系列がランダム乗算過程と等価であることを示している。これらは有用な知見である。

第6章は結論である.

以上要するに本論文は、ランダム乗算過程の振幅とその時間変化における普遍則を見いだし、価格変動の特徴解析に応用することが出来ることを示したもので、複雑系科学、システム情報科学の発展に寄与するところが少くない。

よって、本論文は博士(情報科学)の学位論文として合格と認める。