氏名 (本籍)	新國　亮　　(山形県)
学位の種類	博 士 (情報科学)
学 位 記 番 号	情　博　第　218　号
学位授与年月日	平成 14 年 3 月 25 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当
研究科, 専攻	東北大学大学院情報科学研究科 (博士課程) システム情報科学専攻
学位論文題目	Invariants and Local Moves on Knots, Links and Spatial Graphs (結び目, 絡み目及び空間グラフの不変量と局所変形)
論文審査委員	(主査) 東北大学教授　浦川 肇　　東北大学教授　内田 興二 東北大学教授　日合 文雄　　東北大学助教授　麻生 透

論文内容要旨

現代の情報科学は, 情報の生成原理から伝達手段そして利用方法などにおける一般的な原理の研究として, その扱う領域と対象は自然科学のみならず社会科学及び人文科学にまで, 学問の全分野に亘っている. 特にコンピュータの急速な発展は計算機工学, 計算機科学, 情報工学といった応用科学の発展をもたらした. このようにコンピュータ・サイエンスにおいては離散的対象の研究及び連続的対象の離散的取扱い, 即ち離散数学が基幹としての役割を担っている. 中でも**グラフ理論**は情報科学のどのような分野にも多岐にわたる応用と広がりを持つ離散数学の一分野で, 既に情報科学にはなくてはならないものとなっている. その一方で, それ自体新しい数学の一領域として, 様々な側面から研究が進められている. 例えば位相幾何学的な観点から, 自然にグラフを, 点を線で結んだ図形として捉えた研究が行われている.

空間の中に実現されたグラフもまた, 位相幾何学的に研究することができる. 特に**結び目理論**と呼ばれる数学の立場から研究する分野は**空間グラフ理論**と呼ばれる研究領域である. ここで結び目理論とは, 結ばれているという現象を幾何学的に研究する数学であり, 位相幾何学の基礎の確立及び研究の発展とともに前世紀始めより大きく発展した. 現代では統計力学, 場の量子論, 高分子物理学, 高分子化学及び分子生物学といった分野への応用が見出され, いまや数理科学の範疇を遥かに飛び越えて科学のあらゆる分野と関連し広がりを持つに至った. 特に高分子化学においては, 分子中の原子を頂点, 2 つの原子の共有結合を辺としてできる分子構造式のグラフを空間の配置の問題として捉える必要が生じ, そこで特に結び目理論の研究者に対して, 空間内のグラフの一般的な理論構築が要請された. これらは分子の位相幾何学として 80 年代以降, 盛んに研究されている. 数学的な立場からの空間内のグラフの一般的な理論構築は, 結び目や絡み目で良く知られている既存の幾何学的な同値関係が自然な形で空間グラフに拡張されたのを始めとして, 90 年代以降に特に大きく発展した. 科学への応用上の見地から数学的整備が要請された段階で発生した問題を通じて, 空間グラフ理論が独自の研究課題や原理を持つことが認識され, 進化を遂げつつ至った今世紀, 情報科学及び自然科学からの要請は更に高まって来るであろう.

空間グラフ (結び目, 絡み目) の研究における基本的な問題は, どのように 2 つの空間グラフ (結び目, 絡み目) が同じものであるか違うものであるかを判定するかである. その為には**不変量**が必要になる. 不変量とは, 同じ空間グラフ (結び目, 絡み目) が共通して持っている内在的な量であり, 異なる不変量を持つ空間グラフ (結び目, 絡み目) は互いに違うものである. 不変量は強い程歓迎され, 例えばジョーンズ多項式は, それまで知られていた不変量では区別できなかった結び目や絡み目を区別する強力な不変量である. しかし最近, **ある程度の切り貼りは許して, その範疇で結び目, 絡み目及び空間グラフを分類する**という研究が現れてきた. 本論文で登場する**局所変形**とは, このような切り貼りのことである. 許す局所変形の程度によって粗い分類が考えられるが, 最もゆるやかな方から段階を追って分類を細かくしていこうという考え方である. これは**ヴァシリエフ不変量** (または**有限型不変量**) とも密接に関連して, 90 年代以降, 爆発的に発展してきている. 特に, 2 つの結び目が C_k 変形で移り合う為の必要十分条件は, それらの次数 $k-1$ 以下の任意のヴァシリエフ不変量が一致することである, という葉広和夫及び M.M. グサロフによって独立に証明された定理は, 結び目, 不変量そして局所変形が美しく結び付いた, 結び目理論における最近の重要な成果である.

本論文では, そのような最新の結び目理論の動向を踏まえた上で, 結び目, 絡み目及び空間グラフの幾何学的な構造が, 様々な不変量及び局所変形と如何に相互に関連しているかをいろいろな側面から捉えていく. 本論文で扱った内容は以下の通りである.

(1) 絡み目の多項式不変量とデルタ変形との関係
(2) デルタ絡み目ホモトピーの空間グラフへの拡張
(3) 絡み目及び空間グラフのクラスプ-パス同値分類
(4) 空間グラフにおける結び目の実現問題
(5) グラフの平面はめ込みの局所アイソトピー分類とウー不変量

本論文は 7 つの章からなり, (1) は第 2 章で, (2) は第 3 章で, (3) は第 4, 5 章で, (4) は第 6 章で, そして (5) は第 7 章で扱う. 以下その内容を簡単に述べる.

第 1 章

この章は準備の章である. 本論文を通して扱っていく主要な対象の定義, 及び基礎的な事項を述べる. その内容は,

(1) **結び目, 絡み目, 空間グラフ及びグラフの平面はめ込み**の定義
(2) 空間グラフの間の**アンビエント・アイソトピー**, 及びグラフの平面はめ込みの間の**局所アイソトピー**の定義
(3) 空間グラフの**局所変形**, 特に**デルタ変形**, **クラスプ-パス変形**の定義, また, ホップ絡み目, ボロミアン環とのバンド和の概念及び基本的な性質
(4) 空間グラフの C_k 変形, **ヴァシリエフ不変量**の定義

などである. デルタ変形は絡み目の次数 1 のヴァシリエフ不変量を特徴付け, またクラスプ-パス変形は結

び目の次数 2 のヴァシリエフ不変量を特徴付ける局所変形である.

第 2 章

この章では, **HOMFLY 多項式**と呼ばれる, **コンウェイ多項式**や**ジョーンズ多項式**もその特別な場合として含む多項式不変量の**自己デルタ変形** (= 同一成分上のデルタ変形) による影響を調べ, ジョーンズ多項式や HOMFLY 係数多項式の高階微分を取ることで, 高次のヴァシリエフ不変量との関わりを明らかにする. また, 幾何的な情報と関わる場合の多い多項式不変量の特殊値との関係についての結果も得た.

局所変形を許して絡み目を考えるとき, 元々持っているアンビエント・アイソトピー不変量の局所変形による変化を捉えることが重要になる. これまで, コンウェイ多項式と自己デルタ変形との関係は知られていたが, 今回, 我々は, 自己デルタ変形に関して, HOMFLY 多項式の簡明な漸化式が成り立つことを示した. その方法は, HOMFLY 多項式の計算の際に用いる交差交換の平滑化をヒントに, デルタ変形について平滑化を定義するというもので, これにより従来知られていなかったジョーンズ多項式や HOMFLY 係数多項式の持つ情報へのデルタ変形の影響を調べることが可能になった.

第 3 章

この章では, 自己デルタ変形を許した絡み目の同値関係である**デルタ絡み目ホモトピー** (または**自己デルタ同値**) の概念を空間グラフに自然に拡張し, 空間グラフの研究に従来あまり使われていなかった結び目不変量を用いて, 新しい空間グラフ特有の不変量を構成して空間グラフのデルタ絡み目ホモトピー論を構築した.

デルタ絡み目ホモトピーは, リボン絡み目や, ある条件を満たす境界絡み目はその下で自明になることが知られており, 幾何的にも興味ある性質を持つ. しかしその空間グラフへの拡張及び研究はこれまで行われていなかった. 我々は, 空間グラフに対し, **デルタ辺ホモトピー**及び**デルタ頂点ホモトピー**という同値関係を導入する. 両者の大域的な立場が明らかにされ, 特にデルタ頂点ホモトピーはアイソトピーとホモトピーの間に位置する概念であることを示した.

更に, それぞれ結び目の次数 2, 3 のヴァシリエフ不変量として知られる, コンウェイ多項式の 2 次の係数, 及びジョーンズ多項式の 1 における 3 階微分係数を用いて, 空間グラフ特有のデルタ辺 (頂点) ホモトピー不変量を構成した. これは, それら不変量とデルタ変形との関係, 及びグラフのホモロジー的性質を結びつけることにより成される. この不変量を用いることにより, ホモトピーでは区別できないがアイソトピーでは区別できる空間グラフの無限族の例も構成した. このように空間グラフのアイソトピー分類の立場からも空間グラフのデルタ絡み目ホモトピー論の研究は重要である.

第 4 章

この章では, クラスプ-パス変形を許した絡み目の同値関係である**クラスパス同値**による分類を考える. その為のステップとして, 絡み目のコンウェイ多項式の高次の係数の偶奇とクラスプ-パス変形との関係を明らかにした. また, 絡み目に**代数的非輪状**及び**代数的輪状**という概念を導入し, このような性質を持つ絡み目を, クラスプ-パス同値の下で完全に分類した.

結び目のクラスプ-パス同値類は, 次数2以下のヴァシリエフ不変量, 即ちコンウェイ多項式の2次の係数で完全に分類されることが知られており, 2成分以上の絡み目に関しては, 2, 3成分絡み目, 及び**代数的分離絡み目**の場合は分類が完了していた. 2成分以上の絡み目のクラスプ-パス同値類はヴァシリエフ不変量だけでは分類できないことが知られている. 我々は, 絡み目から定まるグラフについて, そのある種の1次元コホモロジー類がクラスプ-パス同値不変量になることを示した. この不変量は, コンウェイ多項式から来る情報で, かつ次数2以下のヴァシリエフ不変量ではない不変量を統一的に捉えるものである. また, 代数的非輪状及び輪状絡み目に対する我々の分類定理は, これまで知られていた分類定理を全て含むものである.

第5章

この章では, 空間グラフのクラスプ-パス同値分類を考え, 代表的な非平面的グラフである K_5, $K_{3,3}$, 及び閉路の非交和を持つ平面的グラフ P_8 の空間埋め込みを, それぞれクラスパス同値の下で完全に分類した. これらの分類定理は従来知られていなかったものである.

空間グラフのクラスプ-パス同値分類は, 閉路の非交和を持たない平面的グラフの空間埋め込みについては分類が完了し, 結び目の場合と同様に次数2以下のヴァシリエフ不変量で分類されることも知られていた. その際使われた手法は, 直接幾何的に考察するもので, グラフが複雑になる程煩雑さを増すという問題点があった.

この章では, クラスプ-パス変形の性質を代数的対象に翻訳し直すことによってこの煩雑さの解消を図る. 即ち, 空間グラフのクラスプ-パス同値類にはアーベル群の構造が入ることが知られており, 我々はグラフから定まる**三重絡み加群**というアーベル群を定義し, そこから, 空間グラフのクラスプ-パス同値類の成すアーベル群への全射準同型写像を構成してその核を調べることで上記の分類定理を得る. 更に, これらについても結び目と同様に, 次数2以下のヴァシリエフ不変量で分類されることも示した. 特に, 次数2以下のヴァシリエフ不変量で2成分絡み目のクラスプ-パス同値類は分類されないが, 2成分絡み目を含んでいる P_8 の空間埋め込みのクラスプ-パス同値類は分類されるという現象が新たに発見された.

第6章

この章では, 長さ5の閉路の各辺を2重辺にしたグラフ G_8 の空間埋め込みが含む結び目の集合を, 結び目のコンウェイ多項式の2次の係数とジョーンズ多項式の1における3階微分係数を用いて完全に特徴付けた. これは空間グラフにおける結び目の実現問題において, 従来大変難しいと思われていた未解決問題に解答を与えたものである.

グラフ G は, その全ての閉路にどんな勝手な結び目を割り当てても, それを実現するような G の空間埋め込みが存在するとき, (結び目に関し) **順応性を持つ**という. このような研究は, 空間グラフにおける結び目の**実現問題**と呼ばれる. 順応性に関する障害集合 (順応性を持たないグラフで, マイナーという関係で極小なものの集合) の元は現在まで10個見つかっており, そのうち, 順応性を持たない平面的グラフとして初めて発見された G_8 の他は, 結び目のコンウェイ多項式の2次の係数のみを用いて, 実現可能な結び目集合が特徴付けられていた.

従来の方法は, 結び目のコンウェイ多項式の2次の係数を用いて, デルタ変形で変わらない空間グラフの不変量を構成しておき, デルタ変形を用いて各閉路に対応する結び目を構成しながら, 最後にその不変量と

クラスパス変形を用いて実現を完了するというものであった. 今回我々は, 更に結び目のジョーンズ多項式の 1 における 3 階微分係数を用いて, クラスプ-パス変形で変わらない G_8 の空間グラフの不変量を構成しておき, デルタ変形及びクラスプ-パス変形を用いて各閉路に対応する結び目を構成しながら, 最後にその不変量と C_4 変形を用いて実現を完了するという方法によって, 上記の特徴付けを得た.

第 7 章

この章では, グラフの, 多重点が横断的な二重点のみである, いわゆるジェネリックな平面はめこみを, 局所アイソトピーという同値関係の下で完全に分類するという結果を得た. グラフのジェネリックな平面はめこみは, 空間グラフの射影図としても自然に登場する対象である.

我々は, **回転数**の一般化である**ウー不変量**を用いる. ウー不変量は一般にユークリッド空間への多面体のはめ込みに対して定義された不変量であるが, 我々は, 従来知られていなかった, 一般のグラフの平面はめ込みにおけるウー不変量の計算方法を与え, 更に 2 つのジェネリックな平面はめこみが局所アイソトピックであること, それらのウー不変量が一致すること, 及びそれらが 3 種類の局所変形で互いに移り合うことがそれぞれ同値であることを示すことにより, この分類を完了した.

特に S^1 の平面はめ込みは**平面曲線**と呼ばれ, 2 つのジェネリックな平面曲線が**正則ホモトピック**であることと, それらの回転数が一致することが同値であることは良く知られている. 我々の分類定理は, その一種の一般化といえる.

結論として, 本論文において我々は, 結び目や絡み目の不変量とデルタ変形, クラスプ-パス変形との関係について, 従来知られていなかった興味深い現象を明らかにするとともに, それを用いて空間グラフの新たな幾何学的構造を捉えることに成功した. 特に, 従来, 主に次数 2 のヴァシリエフ不変量が用いられていた空間グラフの研究に, 次数 3 のヴァシリエフ不変量を導入したのが大きな特徴である. これにより, 空間グラフにおける結び目の実現問題に関わる未解決問題が解決された. またグラフの平面はめ込みの幾何分類において, 幾何学的構造, 代数的不変量そして局所変形の理想的な結び付きを見出した. これらの研究は結び目, 絡み目及び空間グラフの位相幾何学的な立場からの統一的な理解を促すものとして, 今後更なる進展が期待されるものである.

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

空間グラフの理論は、多くの科学の分野、とりわけ統計力学、場の量子論、高分子化学またＤＮＡなどの分子生物学と関連する興味ある研究分野であり、近年急速に発展しつつある位相幾何学の分野である。空間グラフの理論は、結び目、絡み目理論を一般化し統一する理論で、ボールＩＣチップ内の種々の配線の異同の判定などに応用されるようになり、近年注目を集めている分野である。筆者は空間グラフの問題に、位相幾何学の手法を駆使して多くのめざましい結果を得てきており本論文はそれらの成果をまとめたもので、全編８章よりなる。

第０章は序論である。本論文で得られた成果をまとめている。

第１章は準備である。２つの空間グラフの異同について、種々の段階の異同の定義を与え、あとで必要となる空間グラフの二つの変形すなわち、デルタ変形とクラスプ・パス変形の定義を与えている。

第２章では、HOMFLY（ホンフリー）多項式と呼ばれる結び目の不変量について、第１章で与えた空間グラフに関するデルタ変形との関係を調べ、簡明な関係式が得られることを示した。これは興味ある成果である。

第３章では、絡み目の不変量を一般化して、空間グラフ特有の不変量を構成し、空間グラフのデルタ絡み目理論を構築している。

第４章では、絡み目に代数的に（非）輪状という概念を与え、これらの性質をもつ絡み目について、クラスプ・パス変形によって変わらないという同値関係の下で完全に分類した。これは重要な成果である。

第５章では、空間グラフのうち、平面グラフでない代表例である完全グラフ K5 と２部グラフ K6,6、及び P8 と呼ばれる平面グラフの３種類について、それらの空間グラフとして実現したもののうち、クラスプ・パス変形で変化するものをすべて分類するという興味ある結果を得た。

第６章では、長さ５の閉路の各辺を２重辺とした G8 と呼ばれる平面グラフについて、空間グラフとしての実現の仕方すべてを分類した。

第７章では、与えられたグラフの空間グラフとしての実現を平面に射影してできる平面はめ込みをウー不変量を用いて分類するという興味ある結果を得ている。

以上要するに、本論文は空間グラフの研究において、結び目や絡み目における不変量の研究の手法を一般化して駆使することにより、空間グラフの実現の分類理論を構築したものであり、情報科学並びにシステム情報数理学の発展に寄与するところが少なくない。

よって、本論文は博士（情報科学）の学位論文として合格と認める。