氏名(本籍)	水 尾 勝（みず お まさる） (山口県)
学位の種類	博士(情報科学)
学位記番号	情 博 第 220 号
学位授与年月日	平成14年3月25日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
研究科、専攻	東北大学大学院情報科学研究科(博士課程)システム情報科学専攻
学位論文題目	Analogs of Relative Entropy, Sobolev Spaces and Schwartz Distributions in Free Probability Theory (自由確率論における相対エントロピー、 ソボレフ空間及びシュワルツ超関数の類似)
論文審査委員	(主査) 東北大学教授 日合 文雄　東北大学教授 浦川 肇 東北大学教授 金子 誠　東北大学教授 尾畑 伸明

論文内容要旨

1 序文

1980年代初頭に作用素環論における非可換確率論の領域において、自由独立性と呼ばれる新種の非可換独立性がD. Voiculescuによって発見され発展させられた。この独立性に基づいた非可換確率論、いわゆる自由確率論はその後大きく発展した。量子確率論あるいは代数的確率論と呼ばれている分野においても、通常の確率論の理論体系の極一部に対しては新しい独立性を採用して類似の非可換理論体系が構成できることは既に議論されていたわけであるが、この自由独立性は大変強力でいわゆる確率論と称される全ての理論体系に対して、通常の独立性に替えてこの自由独立性を用いた自由確率論が構成できるように考えられている。また古典独立性が作用素環論的にはテンソル積に密接しているように、自由独立性は自由積に完全に連結しているという観点から、自由確率論の作用素環論への貢献も実際に豊かなものであった。

これまでに構築された自由確率論を振り返ると、古典確率論において主要な立場にあるGauss分布確率変数の役割を自由確率論においては半円分布確率変数が担っていることを確定したことを出発点にして、まず各主要分布の自由確率類似が決定された。また主要定理の類似としては中心極限定理を始めとして各種極限定理が証明された。様々な理論体系の自由確率類似も議論され、自由キュムラント理論、無限分解可能分布族、エントロピー理論と次々に構成されていった。また自由確率論の発展の過程で、ランダム行列の理論、分割問題等に現れる組合せ論等がその新しい確率論に深く関連していることなどが明らかにされたが、このことは、一方ではこの新しい確率論に有効な技術的方法を与え、他方では確率というものに対する新しい視点を提供した。この様な今となってはかなりのレベルに達した自由確率論の現状は、創始者のVoiculescuを始め幾人かの研究者によってテキストとして既にまとめられている。

これまで自由確率論の分野で研究を行ってきたが、本論文で次の2つの新たな研究成果をまとめている。

1. (自由相対エントロピー理論) Voiculescuの1変数自由エントロピーを自由相対エントロピーに拡張し、この新しい相対エントロピーが実際に相対エントロピーとして適切な関数の性質を保有していることを示した。

またこの自由相対エントロピーを用いて、古典確率論で議論された相対エントロピーの摂動理論の自由確率論類似が実際に構成できることを議論した。

2. (自由超関数論) 半円分布システムと呼ばれているものに付随する Sobolev 空間、無限階微分可能関数環、Schwartz 超関論を構成し議論をおこなった。古典確率論において Gauss システムに付随する同様な構造は "Malliavin calculus" として有効に用いられているが、これらはその超関数論の非可換な自由確率類似となっている。

以下学位論文各章の内容を手短にまとめる。

2 自由相対エントロピーの導入 (第2章)

Voiculescu は古典確率論における Boltzmann-Gibbs エントロピーの自由確率類似を発見したのみならず、それのランダム行列理論との深い関連を浮き彫りにした。我々は自由相対エントロピーを発見するにあたり彼のこの路線をより精密に追求することから始めた。すなわち自由エントロピーの microstate 表示と呼ばれているものに議論の焦点を統一するために、まず古典エントロピー (Boltzmann-Gibbs エントロピー) および古典相対エントロピーの同様な microstate 表示を議論した。ここで積分表示で与えられるエントロピー関数から microstate 表示と呼ばれるものへの移行には、Sanov による level-2 大偏差原理が鍵となっていることを強調した。積分表示と microstate 表示の移行はランダム行列の level-2 大偏差原理から誘導されることを明白に意識した観点はここでの研究の 1 つの顕著な姿勢である。

次に microstate 表示された古典エントロピー、古典相対エントロピーおよび自由エントロピーの 3 つを比較することでそれぞれのエントロピーの違いを生じさせる部分が把握できる。したがって自由相対エントロピーを定義するためにはその部分に如何なる形式のものを導入すれば良いかということに問題が転化された訳であるが、我々はその問題を解くために、ランダム行列による確率変数の漸近的近似の理論においてランダム行列自身のエントロピーを最大にするという観点に着目することでこの問題の解答を得た。この様な議論によって microstate 表示によって決定された新しい自由相対エントロピーを再びある種の level-2 大偏差原理を駆使して最終的な積分表示式に変換することで新しい相対エントロピーの定義を確定した。

この様にして得られた自由相対エントロピーは当然相対エントロピーとしての関数性質を保有すべきであるので次にその議論が行われている。しかしここで、この新しい相対エントロピーはポテンシャル論で現れる対数関数を積分核とする 2 重特異積分であって全ての確率分布に対しては積分の定義自身が明白でないという問題を抱えている。そこで我々はこの特異積分自体をエントロピー論的に議論し、最も自然と思われる解釈を提案した。実際ここで提案される解釈のもとでは、この相対エントロピーの正値性、狭義凸性、下半連続性など必要な事実が完全に証明されている。

3 自由相対エントロピーの摂動理論 (第3章)

前章で決定された自由相対エントロピーを用いて相対エントロピーの理論の自由確率類似を構成したのがこの章の内容である。我々が最も関心を持ったのは自由相対エントロピーの摂動理論とそのランダム行列理論との関連である。

まず確率分布の全体がつくる凸空間上で下半連続かつ凸関数であることが証明された自由相対エントロピーに対してその Legendre 変換を解析し、摂動された確率分布の振るまいに対する理論を構築した。この摂動分布は古典論とは異なり摂動関数を用いて陽的に表示することが不可能であるが、その理論構成は古典論に類似した側面を保有するようになされている。そして摂動関数の収束に対する摂動分布の収束についても細かな議論がなされている。

また自由相対エントロピーは古典論と異なり確率分布の空間に直接距離位相を生じさせることは注目すべきことであることが示され、この位相と弱位相との関係についても詳細に分析されている。

確率分布の自由摂動は前章で着目したエントロピーの microstate 表示に現れる行列上の分布に対応する古典的摂動を自然に定めることが分かる。この行列上の古典論的な摂動分布を持つランダム行列の漸近極限が自由確率論的摂動分布になっていること、および行列上の分布とその古典摂動分布の古典相対エントロピーの極限が漸近極限分布の自由相対エントロピーになっていることなどが示されている。これは我々の構成した摂動理論が健全なものであることを保証すると同時に、自由エントロピー理論の初期に Voiculescu が予想した事実の 1 つの数学的証明を与えているという価値も持っている。

以上の様な自由相対エントロピーの摂動理論は自由エントロピーに対しても同様に議論できる。この議論を通じて、古典論における一様分布に対応するものはアークサイン分布であることが明白になっている。また複素平面中のトーラス中に台を持つ確率分布の成す空間に対しても自由相対エントロピーを導入することが可能で、同様の摂動理論を展開することができる。これらを最後の 2 節でまとめている。

4 自由 Schwartz 超関数論 (第 4 章)

互いに自由独立でそれぞれが平均 0 分散 1 の半円分布を持つ非可換確率変数の集合を半円分布システムと呼ぶが、これはいわゆる Gauss システムの自由確率類似である。このような半円分布システムの生成する作用素環は free group factor と呼ばれる重要な環である。このような環に対して、Ornstein-Uhlenbeck Laplacian の自由確率類似およびその完全固有ベクトル系から定まる Fourier 変換が自然に定義されることが知られている。ここではこの Laplacian を用いると通常の Sobolev 空間型の超関数論と同形式の理論体系が矛盾無く構成できることを議論した。これは確率論的には、いわゆる Malliavin calculus に登場する超関数論の自由確率類似を構成したことになる。

まず通常の Sobolev 空間の定義と全く同形式で定義される空間が非可換 L^p 空間の理論の枠組でも矛盾無く構成されることが論じられている。次にそれら Sobolev 空間の射影極限で定義される空間は無限階微分可能関数の成す空間のような性質を保有していることが議論されている。より正確には、この空間は連続な $*$ 演算および掛け算を持った Fréchet 空間であることが証明されている。これまでの構成方法は、古典論すなわち Malliavin calculus で用いる超関数空間の場合と異なり完全に抽象的な構成方を選択しているために、構成した空間が対象の作用素環の内部にあるかが不明である。そこで古典論では必ずしも成立しない Sobolev の補題の自由類似にあたるものが常に成り立つことを示し、抽象的に構成された無限階微分可能関数環が考察されている作用素環の部分環として自然に実現できることが証明されている。これによって我々の理論体系の健全さが最終的に保証される。

無限階微分可能関数環の相対空間として抽象的に定義される Schwartz 超関数の空間は、同じく Sobolev の補題を用いることで、緩やかに増加する Fourier 係数を持つ元の全体と見なされること、すなわち Fourier 展開による表現定理が示され、文字通り Schwartz 超関数の自由確率類似となっていることが明らかにされている。

無限階微分可能関数環上のベクトル場に関すること、および考察されれている作用素環の非可換トポロジー的性質などが最後の 2 節で議論されている。

論文審査の結果の要旨

近年、古典的な独立性に代わる自由独立性を基礎とする非可換確率論、すなわち自由確率論が台頭している。この新種の確率論で注目すべきことは、古典論で基本的な正規分布の自由確率版が半円分布であり、さらにボルツマン-ギッブス・エントロピーや中心極限定理などの古典論における概念や定理の自由確率版がいくつも発見されていることである。著者は新たに、相対エントロピー、ソボレフ空間、超関数の自由確率類似を構成し、それらの性質を解明した。本論文は、それらの研究成果をまとめたもので、全編４章よりなる。

第１章は序論であり、本研究の背景と目的をまとめている。

第２章では、ボイクレスクが発見した自由エントロピーの積分表示とランダム行列によるマイクロ状態表示を見直すことにより、自由相対エントロピーを２重特異積分とマイクロ状態表示の２通りの方式で定義した。ランダム行列の固有値の漸近分布に関する大偏差原理を駆使して、これらの定義の同等性を証明した。さらに、自由相対エントロピーがエントロピーとしての自然な性質をもつことを示した。

第３章では、有界な台をもつ確率分布に対する自由相対エントロピーのルジャンドル変換を解析することにより、自由相対エントロピーを用いた確率分布の摂動理論を構築した。自由摂動分布の自由相対エントロピーが、行列空間上で古典相対エントロピーを用いて摂動した確率分布の古典相対エントロピーの行列サイズを無限大にしたときの漸近極限に等しいことを示した。これは、ボイクレスクが自由エントロピーの導入時に推測した事実の厳密な証明を与えており、重要な成果である。

第４章では、互いに自由独立で平均０分散１の半円分布をもつ非可換確率変数からなる半円分布システム上で、ソボレフ空間論と超関数論の自由確率版を構築した。非可換 L^p 空間を用いてソボレフの補題の類似を示すことにより、ソボレフ空間の自然な自由確率類似を構成した。さらに、自由ソボレフ空間の射影極限とその双対空間として、無限回微分可能シュワルツ関数空間とシュワルツ超関数空間の自由確率類似を与えた。

以上要するに本論文は、情報科学で有用な相対エントロピー、超関数などの自由確率論という新しい枠組での定式化に成功したものであり、情報科学並びにシステム情報科学の発展に寄与するところが少なくない。

よって、本論文は博士（情報科学）の学位論文として合格と認める。