氏名（本籍）	大野芳希 （宮城県）
学位の種類	博士（情報科学）
学位記番号	情第4号
学位授与年月日	平成9年5月15日
学位授与の要件	学位規則第4条第2項該当
研究科，専攻	東北大学大学院情報科学研究科（博士課程）システム情報科学専攻
学位論文題目	A STUDY ON HELSON-SZEGÖ TYPE THEOREMS AND INVARIANT SUBSPACES FOR FUNCTION ALGEBRAS（関数環におけるヘルソン－セゲー型定理と不変部分空間の研究）
論文審査委員	（主査）東北大学教授 浦川 肇　東北大学教授 望月 望　東北大学教授 金子 誠　東北大学教授 海老沢丕道

論文内容要旨

本論文では，情報科学においても重要な定常確率過程の予報問題に関連したヘルソン－セゲー（Helson-Szegö）型の問題を一般の関数環の場合に拡張し，その際，重要な役割を演ずる一般化された推移作用素の不変部分空間を，ベクトル値関数の場合に特徴付けた。

第1章　序論と主定理

定常確率過程においてある時刻までの値が観測されたとき，未知の値を観測された値を用いて予測する理論を予報理論といい，通信理論，電子工学等の分野で多くの応用を持つ，離散定常過程 $\{X_k\}_{k\in Z}$ で，…，X_{-2}, X_{-1} の値の一次結合で X_0 の値が予測出来るための1つの条件はセゲー－コルモゴロフ（*Kolmogoroff*）の定理で与えられているが，これは…，X_{-2}, X_{-1} と X_0 の独立性の問題としてとらえることが出来る。ヘルソン－セゲーはこの独立性の概念を強くして，過去と n 時間以後の未来を表す2つの部分空間のなす角を予測可能性を表す指標として用いることを提唱し，いわゆる古典解析的な立場でヘルソン－セゲー型の問題を論じている。ヘルソン－セゲー型の問題の解析と一般化にハーディ空間の理論は不可欠であるが，そこで重要な役割を演ずるのがフーリエ係数の推移で不変な部分空間の特徴付け定理である。ハーディ空間の不変部分空間の研究はボイルリング（*Beurling*）に始まり，彼は複素関数論を用いてこのような不変部分空間を分類した。ヘルソン－ローデンスレイガー（*Lowdenslager*）はある種の予報問題を解く必要からこれらの結果の実関数論的証明を与えたが，関数環の理論の発展にともない，不変部分空間の特徴付け定理は更に一般化され，それはハーディ空間の理論でもっとも基本的なものの一つであることが分かった。ハルモス（*Halmos*）はヒルベルト空間に値をとる不変部分空間の研究が一般の線形作用素の不変部分空間の研究に有効であろうと予想していた。

第1章の前半でこのような，問題の背景と歴史的経緯を述べる。また，第1章の後半では，抽象ハーディ空間の理論のうち第2章以降で必要とする部分を述べる。

複素平面の閉単位円板の上で連続で，その内部で解析的な複素数値連続関数全体は円板環と呼ばれ，関数環の研究で重要な役割を演ずる。これを一般のコンパクトハウスドルフ空間 X 上に拡張したものの1つがディリクレ環で，これをもとにして抽象ハーディ空間の理論が展開される。ここで，A が X 上のディリクレ環であるとは A が X 上の連続関数全体の作るバナッハ環 $C(X)$ の閉部分環で，定数関数を含み，X の点を分離し，さらに A の関数の実数部分全体が X

上の実数値連続関数で稠密になっていることをいう。

X 上のディリクレ環 A の複素準同形写像は一意表現測度を持つ。複素準同形写像を固定したとき，その一意表現測度 dm を用いてハーディ空間 H^p が A の $L^p(dm)$-閉包として定義される。（$1 \leq p < \infty$，$p=\infty$ のときは $H^\infty = H^2 \cap L^\infty$）。

固定された複素準同形写像の核を A_0 とし，$d\mu$ を X 上の正測度とする。ヒルベルト空間 $L^2(d\mu)$ で A_0 の n 個の関数の積全体 A_0^n と，A の関数の複素共役を取って得られる関数全体 $\overline{A}$ の独立性を測るために角の概念を利用して

$$\rho_n = sup \left| \int_X fg \, d\mu \right|$$

と置く。ここで sup は

$$f \in A_0^n,\ \int_X |f|^2 d\mu \leq 1,\ g \in A,\ \int_X |g|^2 d\mu \leq 1$$

なる f,g についてとる。$0 \leq \cdots \leq \rho_2 \leq \rho_1 \leq 1$ であるが，$\rho_n < 1$ なら A_0^n と $\overline{A}$ は空間 $L^2(d\mu)$ で正の角にあるという。ρ_n が 0 に近ければ近いほど独立性が高いと考えられる。$\rho_n < 1$ なるための測度 $d\mu$ の条件を調べる問題をヘルソンーセゲー型の問題という。第 2 章では，主に，ディリクレ環の立場からこの問題を取り扱い，第 3 章ではその 2 次元的な拡張をはかる。

$L^2(dm)$ の閉部分空間 M が $AM \subset M$ を満たすとき M は不変部分空間であるという。特に，A_0M が M で稠密でないとき単純不変部分空間といい，$AM \subset M$ に加えてさらに $\overline{A}M \subset M$ が成り立つとき重複不変部分空間という。単純不変部分空間は qH^2（q は絶対値 1 の値を取る関数）の形であるというのが不変部分空間定理，あるいは，ボイリングの定理と呼ばれている。ハーディ空間の理論で基本的な 1 つの結果である。第 4 章でヒルベルト空間に値をとるベクトル値関数に対する不変部分空間を考察する。

第 2 章　関数環に対するヘルソンーセゲー型の問題

第 2 章で，まずコンパクトハウスドルフ空間上のディリクレ環 A の複素準同形写像の一意表現測度 dm に正の重み関数 w をつけた測度 wdm に関して $\rho_n < 1$ となるための重み関数の形は $w = exp(u + Cv)$ であることを示す。ここで u, v は $L^\infty(dm)$ の実数値関数で $\| v \|_\infty < \pi/2$ である。Cv は v の共役関数を表す。また，これを更に一般化して dm のグリーソン（*Gleason*）部分が 1 点だけでないとき，従って，ワーマー（*Wermer*）の埋没関数 Z が存在する，すなわち $\{ f \in H^\infty ; \int_X f \, dm = 0 \} = ZH^\infty$ となる関数 Z が存在するとき，測度 wdm に関して $\rho_n < 1$ となる，すなわち，過去と n 時間以後の未来との予測角度が正となるための重み関数の形は

$$w = |P| \ exp(u + Cv)$$

であることを示す。ここで P は次数が n 次以下の，ワーマーの埋没関数の多項式で，u,v は $L^\infty(dm)$ の実数値関数で $\| v \|_\infty < \pi/2$ を満たし，Cv は v の共役関数である。ついで，X 上の正測度 μ に対して $\rho_n < 1$ から dm に関する絶対連続性が得られることを示し，dm のグリーソン部分が 1 点だけの場合とそうでない場合に分け，$\rho_n < 1$ となるための μ の形を決定する。また，n を大きくするとき ρ_n が 0 に収束する。すなわち，過去と n 時間以後の未来との予測角度が±90度に収束するための正測度の形も決定する。ここではディリクレ環よりももっと一般的な関数環の立場で論じる。

第 3 章　$\mathbf{T}^2$ に対するヘルソンーセゲー型の問題

第 2 章の結果はヘルソンーセゲー型定理の 1 次元的な拡張だが，2 次元的な拡張をこの章で取り扱う。ここでは 2 つの単位円周の直積である 2 次元トーラス $\mathbf{T}^2$ 上の連続関数で，$Z^k Y^l$ $((k,l) \in S)$ の多項式で一様近似されるもの全体の作る，標準環と呼ばれるディリクレ環 A について考察する。ここで $Z(e^{ix}, e^{iy}) = e^{ix}$，$Y(e^{ix}, e^{iy}) = e^{iy}$ で，

$$S = \{(k, 0) \in \mathbf{Z}^2 ; k \geq 0\} \cup \{(k, l) \in \mathbf{Z}^2 ; l \geq 1\}$$

である。この場合は2次元ルベーグ測度 $d\sigma$ に正の重み関数 w をつけた測度 $wd\sigma$ に対して $L^2(wd\sigma)$ で Z^mY^nA と $\overline{A}$ が正の角であるための重み関数 w の形が得られる（$(m,n)\in S-\{0\}$）。正の角であるということから，第2章のときのような $\mathbf{T}^2$ 上の正測度に対する絶対連続性は得られない。

第4章　$\mathbf{T}^2$ に対する $\mathbf{L}^2_{\mathrm{H}}$ の不変部分空間

第4章ではもう1つのテーマである不変部分空間について論じる。円板環についての不変部分空間は単純不変部分空間と重複不変部分空間の2種類で，その特徴付はそれぞれボイルリングの定理，ウィーナー（*Wiener*）の定理として有名である。これらの，ヒルベルト空間 H に値をとるベクトル値関数の空間 $L^2_{\mathrm{H}}(dx)$ への拡張はヘルソン，シュリニバサン（*Srinivasan*）などによって得られている。ディリクレ環などの一般の関数環についての不変部分空間は単純不変部分空間と重複不変部分空間の他にもあることが知られているが，メリルーラル（*Merrill,* Ⅲ*-Lal*）はディリクレ環に対してそれを三二不変（*sesqui-invariant*）空間と呼び特徴付けている。第4章では，これを第3章で用いた2次元トーラス $\mathbf{T}^2$ 上の標準環に対して，ヒルベルト空間 H に値をとるベクトル値関数の空間 $L^2_{\mathrm{H}}(d\sigma)$ へ拡張し，すべての不変部分空間に対してその形を決定する。

審 査 結 果 の 要 旨

確率過程とは時間の進行とともに変化する偶然現象のモデルであり，時刻tをパラメータにもつ確率変数の系としてX_tと表わされる。任意のhについて，X_{t+h}がX_tと同じ期待値と共分散をもつとき，（弱）定常確率過程とよばれる。

定常確率過程の理論において，予報問題（prediction theory）は重要な研究課題であるが，それはある時刻tまでの確率変数$X_s(s \leqq t)$が観測されたとき未来の値$X_{t+h}(h > 0)$を，既知の値からより良く予報しようとするものであり，通信理論や電子工学等の分野において多くの応用をもつもので，セゲー，コルモゴロフらにより始められた。なかでも大きな発展をとげたものが離散時間の場合の線形予報理論とよばれるもので，

「$X_t(t=-1, -2, \cdots)$の値の1次結合によりX_0の値が予測できるか」

という形で定式化され，このことが可能であるための条件がセゲー・コルモゴロフの定理で与えられた。その後、解析学の立場から，ヘルソン・セゲーらによって予報角度の概念が提唱された。これは，台風の進路予報における予報円などのようなもので，角度90度は完全に独立な系，角度0は決定系を表わし,正の角度の場合が興味ある場合である。ヘルソン・セゲーは予報角度でもって線形予報問題を定式化し，予報角度が正となる必要十分条件を，1次元円周上のL^2空間の場合に与えた。これが1960年のいわゆるヘルソン・セゲーの定理であり，それ以後，実解析学の分野で，さまざまな設定における定常過程についてこの種の型の定理の成立・不成立が調べられるようになった。本論文は，このような状況にある予報理論を，新たに関数環の研究の立場から検討し，発展させようとするものであり，全編4章よりなる。

第1章は序論である。予報理論におけるヘルソン・セゲー型の定理の背景と歴史的な発展を述べ，第2章において必要となる関数環，特に，ディリクレ環とそれによる予報理論の定式化を行ない，さらに本論文において新しく得られた結果とその意義が述べられている。

第2章においては，一般的なコンパクト・ハウスドルフ空間Xとその上の関数からなるディリクレ環Aを扱い，予報理論の定式化を行なっている。その際，Aから複素数体への準同型ϕが重要な役割を演じることを明らかにし，ヘルソン・セゲー型の定理が成立することを示した。更に予報角度が正となるための必要条件を，ϕを特徴付ける空間X上の測度を決定することにより完全に与えることに成功している。

第3章では，時刻が2つのパラメータ（t,s）をもつという2重定常過程の場合の予報理論を扱っている。この場合においても，2変数関数からなるディリクレ環を扱うことにより予報角度が正の概念が定式化でき，ヘルソン・セゲー型の定理が成立することを示している。

第4章では，第3章において扱ったディリクレ環の詳細な構造を調べ，その不変部分空間を完全に決定し，様々な不変部分空間がある種の可測関数によって生成されており，これが第3章における2重定常過程の予報理論の成功の理由であることを明らかにしている。

以上要するに本論文は，コルモゴロフ・ヘルソン・セゲーらによって始められた定常確率過程の予報理論を，一般の空間のディリクレ環の場合に拡張し，さらに2重定常過程の予報理論へと拡張したものであり，関数解析学及び情報科学の発展に寄与するところが少なくない。

よって，本論文は博士（情報科学）の学位論文として合格と認める。