氏　名（本籍）	菊池芳里	（富山県）
学位の種類	博　士（情報科学）	
学位記番号	情　第13号	
学位授与年月日	平成11年11月11日	
学位授与の要件	学位規則第4条第2項該当	
最終学歴	昭和63年3月　富山大学大学院理学研究科数学専攻修士課程	
学位論文題目	Analytic studies of Banach function spaces and martingales （バナッハ関数空間とマルチンゲールに関する解析的研究）	
論文審査委員	（主　査） 東北大学教授　岡田正巳　東北大学教授　金子　誠 東北大学教授　堀口　剛　東北大学教授　鈴木義也	

論文内容要旨

公平なゲームのモデルとしてよく知られたマルチンゲールの理論は、解析学との関連も大きく、マルチンゲールのハーディー空間の理論の発展と実解析学におけるハーディー空間の理論の発展は互いに大きく影響しあっている。一方、数理ファイナンスなどへの応用などのように、マルチンゲールの理論は種々の情報を解析する際、大変重要である。例えば、雑音の混入する通信システムを考察するとき、実際に観測される雑音に汚染されたデータから、各時点毎にもとの信号（系過程）を順次推定する方法は、一般にフィルターの問題として古くから考察されてきている。ここに最良推定は、系過程の条件付き期待値として現れ、最良推定の解析にはマルチンゲールの解析が必須である。また、近年種々の分野の研究者によって注目されつつある数理ファイナンスの理論において、リスクを伴った資産の、時刻 t における割引額 (discounted price) を表す確率過程は半マルチンゲールである。もとになる確率測度 P を互いに絶対連続な別の測度 Q に変換することによって、これをマルチンゲール（又は、局所マルチンゲール）に変換できるとき、discounted price の解析はマルチンゲールの解析に帰着できる。この場合、もとの確率 P に関する評価を得るためには、確率測度の変換を伴ったマルチンゲールの理論の構築が必要になる。すなわち、マルチンゲールの Q に関する L^p-ノルムを用いて定義されるハーディー空間を考察しなければならない。

本論文では Q に関する L^p 空間より更に一般的な関数空間のノルムを用いて定義されるマルチンゲールの空間の解析が、その中心的なテーマである。

Q に関する L^p-ノルムで定義されるハーディー空間は、通常のハーディー空間

と大きく様相を異にする。その本質的な違いは、P に関する L^p–ノルムの値が確率変数の (P に関する) 分布のみに依存して定まるのに対し、Q に関する L^p–ノルムの値は確率変数の P に関する分布だけでは決定されないという事実に基づく。前者の性質は「再配分不変性」と呼ばれる。

再配分不変性を欠いたノルムを考察する場合、これまでに確立されてきたハーディー空間の性質の多くは、成立しない。本論文のテーマは、再配分不変性を欠いたノルム、特別な場合として Q に関する L^p ノルムを用いて定義されるマルチンゲールの空間の解析である。従って、分布が同じである二つの確率変数を同一視する従来の確率論の立場に立つことはできず、自ずからマルチンゲールを分布に頼ることなく、純粋に解析的に扱う必要が生ずる。

第一章は序章である。本論文に於いて必要な概念を整理して解説する。特にバナッハ関数空間における種々の概念は、確率論関係の研究者にはあまり馴染みの無いものと思われるので、必要な概念をできるだけ簡易に解説する。

第二章はバナッハ関数空間のノルムに関する、増加過程のための不等式及びマルチンゲール不等式を考察する。本章は前半と後半に二分される。

前半では、再配分不変空間における増加過程のための不等式を考察する。マルチンゲール不等式などを考察する際、Garsia の補題と呼ばれる L^p–ノルム及び Orlicz 空間のノルムに関する不等式がよく利用される。この Garsia の補題を再配分不変空間のノルムに関する不等式に拡張することが目的である。この拡張が可能な空間は、Boyd インデックスを用いて特徴づけられる。さらに、区間 $[0,1]$ 上の関数に作用するハーディーの作用素の有界性と、Garsia の補題の関連性を明らかにする。

上述の Garsia の補題の拡張を用いて Burkholder–Davis–Gunddy 型の再配分不変空間におけるのマルチンゲール不等式の証明を与える。更に、再配分不変空間におけるマルチンゲール不等式の成立とハーディー作用素の有界性に関する Shimogaki の定理が同値であることを証明する。これにより、マルチンゲール不等式という確率論的な結果と、作用素の有界性という純粋に解析学的な結果が互いに結びついていることが示される。

後半では、Garsia の補題の拡張を用いて、いわゆる増加過程のエネルギー不等式の一般化を与える。これはエネルギー不等式を、Orlicz 空間のノルムに拡張したものであり、その特別な場合として John–Niremberg の不等式を含んでいる。拡張されたエネルギー不等式の応用として、Bassily–Mogyorodi によって証明された、BMO_Φ–ノルムと BMO_1–ノルムの同値性の簡単な別証明を与える。更に、本章の最後に John–Nirenberg の不等式の応用として、マルチンゲールに付随する増加過程の比を含んだマルチンゲール不等式を証明する。これは実解析学における Murai–Uchiyama の結果の確率論的類似であり、Burkholder–Davis–Gundy の不等式の拡張でもある。

第三章では、必ずしも再配分不変性を仮定しないバナッハ関数空間における Doob 型のマルチンゲール不等式を考察する。数理ファイナンスなどで、確率測度の変換を用いる場合には再配分不変性を仮定できないので、この様な場合の考察は意味を持つ。マルチンゲールの理論では、時刻 t までに起こり得るすべての事象の

族 $\mathcal{F}_t$ を時刻の推移のとともに考察し、集合族 $\mathcal{F}_t$ の族 $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ を filtration と呼ぶ。再配分不変空間におけるマルチンゲール不等式は、filtration に無関係に成立するのに対し、再配分不変性を仮定しない空間においては、マルチンゲール不等式が成立するか否かは filtration に大きく依存する。本章ではバナッハ関数空間において filtration に依存せずに Doob 型の不等式が成立すると仮定すれば、その空間は再配分不変性を持たねばならぬことを証明した。これにより、再配分不変空間とは Doob 型の不等式が filtration に依存することなく成立する空間として特徴づけられる。これも確率論的な結果と解析学的な結果の関連を示す結論といえる。更に、この結果の応用として、Izumisawa–Kazamaki によって導入された重み関数に関する A_p 条件が filtration に依存せずに成立すれば、そのような重み関数は考察する必要がない、すなわち、荷重 L^p–ノルムが、元の L^p–ノルムと同値である、という結論を導くことができる。ここに A_p 条件とは、荷重 L^p–ノルムに関する Doob 型の不等式の成立とほぼ同値な、重み関数と filtration に関する条件であり、解析学において B. Muckenhoupt が導入した A_p 条件の確率論的類似である。

第四章のテーマは、バナッハ関数空間のノルムに関するマルチンゲールの収束である。マルチンゲールの収束に関する問題は、その理論の中で最も早くから考察され、おおかた解決されているように思われがちであるが、ノルム収束に関する限り L^p–ノルムに関する結果が知られている程度であり、より一般な空間におけるノルム収束は考察されていない。本章では、一様可積分なマルチンゲールが(必ずしも再配分不変性を仮定しない)バナッハ関数空間のノルムに関して収束するための必要十分条件を与える。すなわち、バナッハ関数空間において、マルチンゲールが収束することは条件付き期待値(の列)が作用素として一様有界になることと同値であることを示す。再配分不変性を仮定しない関数空間の考察は、確率測度の変換を伴う場合などに応用され得ることはすでに指摘している通りであるが、ここで得られたマルチンゲールのノルム収束に関する結果も、確率測度の変換を与える重み関数に対して適用することができる。すなわち、マルチンゲールが荷重 L^p–ノルムに関して収束することと、重み関数が(確率論的) A_p 条件を満たすことは同値であることを証明する。尚、これは解析学において B. Muckenhoupt が証明した、ポアソン積分が荷重 L^p–ノルムで収束するための必要十分条件は、重み関数が(解析学的) A_p 条件を満たすことである、という結果の確率論的類似である。これまで A_p 条件は、荷重 L^p–ノルムに関するマルチンゲール不等式との関連を中心に考察されてきたが、A_p 条件とノルム収束の同値性に着目すれば、A_p 条件は不等式よりむしろ収束との関連で考察する方が自然であることが分かる。

更に、本章ではマルチンゲールとは限らない確率変数 f の条件付き期待値の列 $\{E[f\,|\,\mathcal{F}_n]\}_{n\geq 1}$ のバナッハ関数空間における収束も考察する。

第五章では、バナッハ関数空間に対応して定義される、マルチンゲールのハーディー空間の双対性を考察する。通常マルチンゲールのハーディー空間 H^p は、最大関数が L^p に属すマルチンゲールの全体として定義される。ここに、マルチンゲールの $X=(X_t)$ の最大関数とは、確率変数 $\sup_{t\geq 0}|X_t|$ のことである。これは、解析学におけるハーディー空間が、ハーディーの最大関数を用いて定義されるに対

応している。解析学においては、最大関数の可積分性がその関数のフーリエ級数の概収束と深い関わりを持つのに対応し、マルチンゲールの理論においても、最大関数の可積分性は、収束、見本関数の性質など多くの個々のマルチンゲールの性質と深く関わっている。マルチンゲールのハーディー空間を考察することの優位性は、最大関数がある種の可積分性を持つマルチンゲールの全体を、統一的に扱うことにある。

本章では、L^p の代わりに、より一般的なバナッハ関数空間を用いてマルチンゲールのハーディー空間を定義し、その空間上で定義された連続線形汎関数の表現を確立する。数理ファイナンスの理論におけるように、確率測度の変換を考える場合、新しい測度に関しては L^p–ノルムでさえ、もとの測度に関して再配分不変にはならない。従って、ハーディー空間を上記のように一般化して考察する必要が生ずる。ここで得られた連続線形汎関数の表現は、filtration のある種の正則性(あるいはマルチンゲールの見本関数の連続性)を仮定した上で導かれる結論であるが、この仮定は本質的であり、改良はできても取り除くことは不可能であると思われる。例えば、ブラウン運動から自然に導かれる filtration は、この仮定を満たす。本章で得られた結論は、有名な H^1 と BMO 空間の双対性の結果を拡張するものであり、更に研究を進めることにより、マルチンゲールのハーディー空間の構造をより明らかにすることができるものと思われる。

論文審査の結果の要旨

マルチンゲールの概念は条件付期待値を用いて定義され、信号の最良推定等においても重要である。近年の数理ファイナンスにおいて、リスクを伴った資産額を表す確率過程は半マルチンゲールであり、マルチンゲール理論を適用するためには、より一般の確率空間上における解析を必要とする。著者は、確率測度の変換を伴ったマルチンゲール理論の研究において、確率空間上に定義された一般的なバナッハ関数空間を再配分不変性の観点から研究してきた。本論文は、その研究成果をまとめたもので、全編５章よりなる。

第１章は序論である。

第２章では、再配分不変空間のノルムに関して、ガルシアの補題の拡張可能性がボイドインデックスにより特徴付けうることを示している。これよりバークホルダー型のマルチンゲール不等式を証明し、不等式の成立とハーディー作用素の有界性に関する下垣の定理とが同値であることを証明している。さらにガルシアの補題の拡張を用いて、増加過程にたいするエネルギー不等式の一般化を与えている。特別な場合としてジョン・ニレンバーグの不等式を含む。この応用として実解析学における内山・村井の不等式の確率論的類似を示している。また、これらを用いて確率論と実解析学との関連を解明している。これらは有用な成果である。

第３章では、再配分不変性の仮定を緩めた一般のバナッハ関数空間におけるドゥーブ型のマルチンゲール不等式を考察して、再配分不変性は、時刻ｔまでの事象によるフィルトレーションには無関係に不等式が成立することと同値である、という新しい結果を証明している。これは実解析学におけるマッケンハウプトの導入した重み関数に関する結果を一般の確率論の枠組みで研究するに際して基本的な役割を果たすものであり、重要な知見である。

第４章では、バナッハ関数空間のノルムに関して、マルチンゲールが収束するために、条件付期待値作用素が一様有界であることは必要十分である、ということを証明している。これより、マルチンゲールが荷重ｐ乗積分の定めるノルムに関して収束することと、その重み関数がある知られた条件を満たすこととは同値であることも導いている。

第５章では、実解析学において重要なハーディー空間に対応する、マルチンゲールのハーディー空間を、従来よりも一般のバナッハノルムを用いて拡張している。さらに、この空間上で定義された連続線形汎関数が、有限変動過程によって表現されることを示している。その成果としては、Ｈ１空間とＢＭＯ空間が互いに双対空間になっているという周知の結果の一般化を証明している。この双対性のための必要十分条件が、前章までにおいて調べられたボイドインデックスによって与えられることを示して、結論としている。

以上要するに本論文は、再配分不変性の仮定を緩めた一般のバナッハ関数空間に属するマルチンゲールに関する重要な諸性質を解明し、関数解析学への応用も考察したものであり、情報基礎科学及び確率論の発展に寄与することが少なくない。

よって、本論文は博士（情報科学）の学位論文として合格と認める。