氏　名（本　籍）	岡　田　達　也（おかだ　たつや）　　（岩手県）
学 位 の 種 類	博　　士（情報科学）
学 位 記 番 号	情　　第　19　号
学位授与年月日	平成 12 年 10 月 12 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 2 項該当
最 終 学 歴	昭和 57 年 3 月東北大学大学院理学研究科博士課程前期 2 年の課程
論 文 題 目	Multinomial Measure and its Application to Digital Sun Problems （多項測度とそのデジタル和問題への応用）
査 委 員	（主　査） 東北大学教授　岡　田　正　己　　東北大学教授　鈴　木　義　也 東北大学教授　徳　山　　豪

論　文　内　容　要　旨

多項測度 $\mu_{\boldsymbol{r}}$ は, p を 2 以上の自然数として, 次のように定義される単位区間 I 上の確率測度である。すなわち, ベクトル $\boldsymbol{r} = (r_0, r_1, \ldots, r_{p-2})$ を,

$$0 \le r_k < 1, \quad k = 0, 1, \ldots, p-2, \ 0 < \sum_{k=0}^{p-2} r_k \le 1$$

を満たすように定め, $r_{p-1} = 1 - \sum_{k=0}^{p-2} r_k$ とするとき,

$$\mu_{\boldsymbol{r}}(I_{n+1,pj+k}) = r_k \mu_{\boldsymbol{r}}(I_{n,j}),$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots, \ j = 0, 1, \ldots, p^n - 1, \ k = 0, 1, \ldots, p-1.$$

ここで, $I_{0,0} = I = [0,1]$ であり, $I_{n,j}$ $(j = 0, 1, \ldots, p^n - 1)$ は I の p^n 個の等分割である。

$\mu_{\boldsymbol{r}}$ の分布関数を $L_{\boldsymbol{r}}$, すなわち, $L_{\boldsymbol{r}}(x) = \mu_{\boldsymbol{r}}([0,x])$, $x \in I$ とする。もしもすべての r_k が $1/p$ に等しいなら $\mu_{\boldsymbol{r}}$ はルベーグ測度となるが, それ以外ではその分布は非常に不均一なものとなる。一般に, このような不均一なパターンが埋もれているフラクタル構造をマルチフラクタルという。多項測度は最も単純で典型的なマルチフラクタル測度である。

マルチフラクタルの概念は, 1980 年代前半に理論物理学者によって導入され, 以来マルチフラクタルはフラクタル理論の中の最も重要なテーマの一つとなり, 物理学を中心に数値実験を使った数多くの研究があり, また数学的に厳密に取り扱われた研究も多くある。

多項測度で $p = 2$ の場合を二項測度といい μ_{r_0} で表し, その分布関数を $L_{r_0}(x)$ で表すことにする。 $L_r(x)$ はルベーグの特異関数とよばれる。1984 年に畑と山口は高木関数を母関数とするカオス力学系と二項測度の関係を無限差分方程式系の立場から解析し, 高木関数を一般化した連続関数のクラスを調べ, 高木関数とルベーグの特異関数との関係を明らかにしている。ま

た, 1991 年に関口と塩田は彼らの結果をより一般化した。
本研究では, 多項測度を取り扱って, 二項測度の場合に成り立った結果と類似の結果を得ることに成功した。これらの結果は, 例えばそのサポート自身がカントール集合などのフラクタル図形となる多項測度に対しても成立する。さらに, その結果を数論のデジタル和問題に応用した。デジタル和問題とは, 自然数 n の p-進展開, $n=\sum_{i\geq 0}\alpha_i(n)p^i$ における展開係数の和 $s(n)=\sum_{k\geq 0}\alpha_k(n)$ をデジタル和とよび, $s(n)$ に関する種々の量を求める問題である。その代表的な例としては, N, k を自然数, ξ を実数として,

$$F(\xi,N)=\sum_{n=0}^{N-1}e^{\xi s(n)}\qquad (\text{指数和}),$$

$$S_k(N)=\sum_{n=0}^{N-1}s(n)^k\qquad (\text{べき和})$$

などが挙げられる。 これらの和については, N が p のべきであれば簡単に求めることが出来るが, 一般の N に対してこれらの和を求めることは困難である。デジタル和問題は 19 世紀末から主に整数論の研究者によって調べられてきており, S_1 に関しては 1940 年の Bush による $S_1(N)\sim N\frac{\log_2 N}{2}$, $(N\to\infty)$ という漸近評価, 1949 年の Mirsky による $S_1(N)=N\frac{\log_2 N}{2}+O(N)$, $(N\to\infty)$ という誤差項の評価という経過をたどって, 60〜70 年代に Trollope, Delange によって, 高木関数を用いた具体的な表示が得られた。一般の S_k については 80 年代に Coquet 達によってある程度の表現が得られ, F についても 80 年代後半に Stein によってある種の具体的な表示が得られている。
一方, 情報科学の分野においても, 70 年代の Knuth や McIlroy の研究により, デジタル和がデータ処理におけるある種のマージングのコストに密接に関係することが知られていた。しかし, これまではデジタル和問題を統一的に扱える道具が知られておらず, S_k と F もそれぞれ独自の方法で研究されてきた。本研究ではそれらを統一的な手法で扱うことに成功した。

本論文はそれらの成果をまとめたものであり, 全編 5 章からなっている。

第 1 章は序論であり多項測度, デジタル和問題における諸定義, および本研究にいたる背景を述べている。

第 2 章では, 多項測度 $\mu_{\mathbf{r}}$ とその分布関数 $L_{\mathbf{r}}$ を研究するが, 以下に本章で得られた結果を述べる。

(1) テント型関数を基底関数としたシャウダー展開を一般化して, $L_{\mathbf{r}}$ をもとにした次のような連続関数の展開定理を与えた。すなわち, $\sum_{l=0}^{k}r_l=a_k$ として,

$$c_{\mathbf{r},n,j,k}(f)=f(\frac{pj+k+1}{p^{n+1}})-(1-a_k)f(\frac{j}{p^n})-a_kf(\frac{j+1}{p^n}),$$

$$\Psi_{\mathbf{r},n,j,k}(x)=\int_0^x\{\frac{\mathbf{1}_{I_{n+1,pj+k}}}{r_k}-\frac{\mathbf{1}_{I_{n+1,pj+k+1}}}{r_{k+1}}\}\frac{d\mu_{\mathbf{r}}}{\mu_{\mathbf{r}}(I_{n,j})},$$

$n=0,1,2,\ldots,\ j=0,1,\ldots,p^n-1,\ k=0,1,\ldots,p-2$ とするとき、
もし $\mathbf{r}$ が非退化, すなわち $r_l>0,\ l=0,1,\cdots,p-1,$ であれば任意の連続関数は次のように一意に展開される

$$f(x)=f(0)+\{f(1)-f(0)\}L_{\mathbf{r}}(x)+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{p^n-1}\sum_{k=0}^{p-2}c_{\mathbf{r},n,j,k}(f)\Psi_{\mathbf{r},n,j,k}(x).$$

(2) (1) の展開定理を無限差分方程式系の研究に応用する。$\boldsymbol{r}$ を非退化とし，$L_{\boldsymbol{r}}$ の満たす無限差分方程式系を一般化して

$$\begin{cases} f(\frac{pj+k+1}{p^{n+1}}) - (1-a_k)f(\frac{j}{p^n}) - a_k f(\frac{j+1}{p^n}) = c_n, \\ f(0),\ f(1):\ \text{given}, \\ n = 0,1,2,\ldots,\ j = 0,1,\ldots,p^n-1, \\ k = 0,1,\ldots,p-2. \end{cases}$$

を考える。このとき，この無限差分方程式系がただ一つの連続解をもつための必要十分条件が $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n| < \infty$ であることを示した。この十分性を示すには (1) の展開定理を用い，必要性を示すには，$L_{\boldsymbol{r}}$ に関係する単位区間上の離散力学系がカオス的であることを用いている。

(3) $L_{\boldsymbol{r}}$ に関する，多項測度 $\mu_{\boldsymbol{r}}$ を定義するパラメータ r_l についての導関数を具体的に表示した。すなわち，$\mathbf{u} = (u_0, u_1, \ldots, u_{p-2}) \in \mathbf{Z}_+^{p-1}$, $|\mathbf{u}| = u_0 + u_1 + \cdots + u_{p-2}$ とするとき

$$\frac{\partial^{|\mathbf{u}|}}{\partial r_0^{u_0}\partial r_1^{u_1}\ldots\partial r_{p-2}^{u_{p-2}}} L_{\mathbf{r}}(x) = \mathbf{u}! T_{\mathbf{r},\mathbf{u}}(x).$$

ここで，$T_{\mathbf{r},\mathbf{u}}(x)$ はフラクタルな関数として具体的に表されている。

これらの結果は二項測度に関する畑と山口，関口と塩田の結果の多項測度への一般化である。さらに，ここで得られた結果は $\boldsymbol{r}$ が退化，すなわち $r_l = 0$ となるパラメータがある場合にも成立する。

(4) 多項測度と特異点スペクトルとの関連について述べる。一般に，単位区間上の確率測度 μ に対して，

$$N_{p^{-n}}(\alpha) = \sharp\left\{I_{n,j}:\ \mu(I_{n,j}) \geq (p^{-n})^{\alpha}\right\} \quad -\infty < \alpha < \infty$$

として，特異点スペクトル $f(\alpha)$ は

$$f(\alpha) = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{\log\left\{N_{p^{-n}}(\alpha+\varepsilon) - N_{p^{-n}}(\alpha-\varepsilon)\right\}}{-\log p^{-n}}$$

と定義される。これはマルチフラクタル構造において，その構造を特徴付けている部分構造のフラクタル次元をスペクトルという形で表現するものである。ここではスペクトルが同一である二つの多項測度 $\mu_{\boldsymbol{r}}$, $\mu_{\boldsymbol{r}'}$ の間の関係を明らかにした。

第３章では２進展開におけるデジタル和問題を考察する。自然数 N に対して $t = \log_2 N$ とし，$[t]$ をその整数部分，$\{t\}$ をその少数部分とするとき，ルベーグの特異関数 L_r とデジタル和 $s(n)$ の関係を表す次の等式

$$L_r\Big(\frac{1}{2^{1-\{t\}}}\Big) = \sum_{n=0}^{N-1} r^{[t]+1-s(n)}(1-r)^{s(n)}$$

が，本章では本質的な役割をはたしている。ここで得られた結果は次の通りである。

(1) Coquet によって得られたべき和 S_k に関する結果を改良し，

$$S_k(N) = N\sum_{l=0}^{k} H_{k,l}(t)\left(\frac{t}{2}\right)^l$$

という表示を得た。Coquet も S_k に対してこのような表示を与えているが，k が３以上では具体的な関数では与えられていない。ここでは L_r の r による高階の導関数を用いて $H_{k,l}$ は具体的に表示できることを示した。

(2) 指数和 F に関して

$$F(\xi,N)=N^{\log_2(1+e^{\xi})}2^{(1-\{t\})\log_2(1+e^{\xi})}L_{\frac{1}{1+e^{\xi}}}\left(\frac{1}{2^{1-\{t\}}}\right)\quad \xi\in\mathbf{R}$$

と言う具体的な表示を得た。従来, F は S_k と同様にいたるところ微分できない関数で表現されるであろうと予想されていたが, この結果は, この予想に対して否定的な解答を与えている。

(3) 次の関係式：

$$\left.\frac{\partial^k}{\partial\xi^k}F(\xi,N)\right|_{\xi=0}=\left.\sum_{n=0}^{N-1}s(n)^k e^{\xi s(n)}\right|_{\xi=0}=S_k(N)$$

を用いて, 指数和からべき和を求める方法を明らかにした。

第４章では第２章の結果を応用して一般の自然数 p に関する展開におけるデジタル和を研究する。ここで得られた結果は次の通りである。ただし, 自然数 N に対して $t=\log_p N$ である。

(1) $L_{\boldsymbol{r}}$ に関する, $\mu_{\boldsymbol{r}}$ を定義するパラメータ r_l についての導関数を用いてデジタル和の指数和とべき和に関して次のような具体的表示を与えた：

$$F(\xi,N)=\frac{1}{r_0^{[t]+1}}L_{\boldsymbol{r}}\left(\frac{1}{p^{1-\{t\}}}\right).$$

ただし, $L_{\mathbf{r}}$ はパラメータ

$$r_l=\frac{e^{l\xi}}{1+e^{\xi}+\cdots+e^{(p-1)\xi}}\quad l=0,1,\ldots,p-1$$

で与えられる多項測度である。 次に,

$$S_k(N)=N\sum_{l=0}^{k}H_{k,l}(t)\left(\frac{t}{p}\right)^l.$$

ここで, $H_{k,l}$ は具体的に表示される。

(2) 従来のデジタル和問題において考察されてきたべき和 S_k, 指数和 F では, ビットごとの情報が落ちてしまうという欠点がある。よって n の展開におけるビット l, $l=1,2,\cdots,p-1$, の出現回数を $s(n,l)=\sum_{i\geq 0}\mathbf{1}_{\{\alpha_i(n)=l\}}$ とし, $s(n)=(s(n,1),\ldots,s(n,p-1))$ として

$$S_{\boldsymbol{k}}(N)=\sum_{n=0}^{N-1}s(n)^{\boldsymbol{k}}=\sum_{n=0}^{N-1}\prod_{l=1}^{p-1}s(n,l)^{k_l},\quad \boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_{p-1})\in\boldsymbol{N}^{p-1},$$

$$F(\boldsymbol{\xi},N)=\sum_{n=0}^{N-1}e^{(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{s}(n))}=\sum_{n=0}^{N-1}e^{\sum_{l=1}^{p-1}\xi_l s(n,l)},\quad \boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\ldots,\xi_{p-1})\in\boldsymbol{R}^{p-1}$$

によって, 各ビットの情報を含んだべき和と指数和を定義し, その具体的な表示を与えた。

(3) (2) の結果を用いると自然数を p-進展開したときに表われるワードの出現回数に関する詳しい情報を得ることが可能になる。すなわち, $w=(a_{d-1},\ a_{d-2},\ \cdots,\ a_0)$, $a_i\in\{0,1,\cdots,p-1\}$, $i=0,1,\cdots,d-1$ を長さ $d\ (>1)$ のワードとして, 自然数 n の p-進展開, $n=\sum_{i\geq 0}\alpha_i(n)p^i$ におけるワード w の出現回数を

$$b(n,w)=\sum_{i\geq d}\mathbf{1}_{\{w=(\alpha_{i-1}(n),\ \alpha_{i-2}(n),\ \cdots,\ \alpha_{i-d}(n))\}}$$

で与え, $B(N,w)=\sum_{n=0}^{N-1}b(n,w)$ と定義する。このとき, (2) の結果を用いて $B(N,w)$ が具体的に表示できることを示した。

第５章は結論である。

論文審査の結果の要旨

p－1個のパラメータを用いて、入れ子操作で定義される単位区間上の確率測度は多項測度とよばれ、対応する不規則な分布関数はフラクタル解析の研究対象である。特にpが2の場合は二項測度とよばれ、無限差分方程式系や高木関数を母関数とするカオス力学系との関連で研究されてきたが、多項測度に関しては研究が不十分であった。著者は二項測度に対する従来の結果の精密化と、一般の多項測度への拡張を研究し、さらに、その研究を自然数のp－進展開における展開係数の種々の和を求めるデジタル和問題に応用した。本論文は、これらの成果をまとめたもので、全文5章よりなる。

第1章は序論であり、定義や記号を導入し、本研究に至る背景と目的を述べている。

第2章では、多項測度を基にした連続関数の展開定理を与え、それを用いて、多項測度の分布関数の満たす無限差分方程式系を一般化し、その系がただ一つの連続解をもつための必要十分条件を与えている。さらに、多項測度を定義するパラメータに関する、その分布関数の導関数をフラクタルな関数を用いて具体的に表現した。これらは、畑と山口、関口と塩田らによる二項測度に関する結果の多項測度への一般化である。次に、二つの多項測度が同一の特異点スペクトルをもつための必要十分条件を与えた。これらは興味深い成果である。

第3章では、二項測度を定義するパラメータに関する、その分布関数の高階の導関数を用いて二進展開におけるデジタル和のべき和の具体的な表現を与えた。これはCoquetによって得られていた結果の改良である。また、指数和に関する具体的な表現式も与え、指数和はべき和と同様に、至る所微分できない関数で表現されるであろう、という予想に対して否定的な解答を与えている。これらは重要な知見である。

第4章では、p－進展開に一般化してデジタル和問題を研究した。まず、多項測度を定義するパラメータに関する、その分布関数の導関数を用いて、デジタル和の指数和とべき和に関する具体的な表現式を与えた。さらに、各ビットの情報を含んだべき和と指数和を新たに定義し、その表現式も導出して、自然数のp－進展開に現れるワードの出現回数の計算に応用している。これは重要な成果である。

第5章は結論である。

以上要するに本論文は、多項測度に関する無限差分方程式系を解析し、パラメータに関する、その分布関数の導関数を具体的に表現し、デジタル和問題への応用も与えたものであり、情報基礎数理学の発展に寄与するところが少なくない。

よって、本論文は博士（情報科学）の学位論文として合格と認める。