氏名（本籍地）	宮本　拓歩（みやもと　たくほ）
学位の種類	博　士（情報科学）
学位記番号	情　博　第　398　号
学位授与年月日	平成20年3月25日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
研究科、専攻	東北大学大学院情報科学研究科（博士課程）システム情報科学専攻
学位論文題目	Orbital approach to free entropy and free entropy dimension （自由エントロピーと自由エントロピー次元に対する軌道アプローチ）
論文審査委員	（主査）東北大学教授　日合　文雄 東北大学教授　浦川　肇　　東北大学教授　尾畑　伸明

論文内容の要旨

序文

作用素環論, 特に von Neumann 環論は 1929 年に J. von Neumann により, 二重可換子定理が証明され幕をあけた. その後, 1936 年から 1943 年までの間に, von Neumann は F. J. Murray と共に, 主に 4 編の論文で作用素環の基礎を作りあげた. そこでは, すでに von Neumann 環の (III 型を除く) 型の分類理論が得られており, さらに, 非同型な 2 つの II_1 型因子環の構成にまで至っている. ここで, 非同型な 2 つの II_1 型因子環とは, 超有限 (または, AFD) と呼ばれる行列環の増大列により, 然るべき位相で近似される環と, 自由群環と呼ばれる自由群 $\mathbb{F}_n$ のユニタリ表現から生成される環 $L(\mathbb{F}_n)$ である. 特に, 自由群環に対する非同型問題は, von Neumann により暗に指摘され, 次のように述べられる:

$$「n \neq m ならば L(\mathbb{F}_n) \not\cong L(\mathbb{F}_m)\ ?」$$

一方, 自由確率論と作用素環の関係は, 1985 年の D. Voiculescu の論文により作用素環の自由積の概念と密接に結びついて幕をあけた. 非可換確率論の一種である自由確率論では, 古典確率論の独立性に代わる自由性という概念が基本である. また, 作用素環の自由積は自由群環の構造と結び付いており, 自由群環の解析に自由確率論のアイディアが随所に使われている. 先程述べた自由群環の非同型問題も, 自由確率論の手法を活かすことにより大きく進展した. 現在, 自由確率論における主な進展のひとつは (自由エントロピー次元論を含む) 自由エントロピー論である.

Voiculescu は 6 編に及ぶシリーズ論文の中で, 行列の微小状態 (以下では単に微小状態と呼ぶことにする) を定義し, これをもとに忠実トレース状態をもつ有限 von Neumann 環に対する自由エントロピー χ と自由エントロピー次元 δ と呼ばれる古典的なエントロピーと次元の自由確率論的対応物を導入した. Voiculesu は, これを用いることにより von Neumann 環論の古くからの大きな問題のひとつである「自由群環は Cartan 部分環を持たない」ことを示した. さらに, Ge は Voiculescu と同様の手法により「自由群環は素である」ことを示した. このように, 自由エントロピーを巧みに評価することにより, 相次いで大きな問題が解決に導かれた. 現在のところ, 非同型問題の解決

には至っていないが, 自由エントロピー論, 特に自由エントロピー次元は, この問題に対する最も有用なアプローチのひとつであると思われる.

一方で, 上記の作用素環論における自由エントロピーを応用した輝かしい成果とは裏腹に, 自由エントロピーや自由エントロピー次元については基本的な一般論でさえ, 技術的な困難ゆえに分かっていないことが多い. 最近においては, いろいろな種類の自由エントロピーや自由エントロピー次元が定義されており, それらと Voiculescu によるオリジナルの自由エントロピー, もしくは自由エントロピー次元の関係が問題になっている. また, これらの量の中には, Voiculescu の自由エントロピーや自由エントロピー次元を直接計算するより, 計算しやすいものもある. 特に, Jung により導入されたパッキング次元は, 自由エントロピー次元と等価であり, これにより超有限 von Neumann 環や Kazhdan の性質 (T) をもつ von Neumann 環の自由エントロピー次元が計算され, これらのクラスの von Neumann 環に対する不変量であることがわかっている.

さらに, Voiculescu はすでに述べた 6 編の論文の中で, 行列の微小状態を用いないアプローチ, すなわち非可換多元環上の微分子を用いて自由エントロピー χ^*(及び, 自由エントロピー次元 δ^*) を定義した. Voiculescu はこの微小状態を用いないアプローチを発展させて, 部分環に対する自由相互情報量 i^* を導入し, これが特に射影元に対しても意味を持つことを言及した. ところが, 射影元の自由エントロピー χ は (もちろん, χ^* も) いつも $-\infty$ である. そこで, Voiculescu はまず射影元に対する微小状態による自由エントロピーの定義を見直すことを提案し, そのアイディアについても言及した.

このことをもとにして, 日合と植田は射影元にうまく適合した自由エントロピーを正確に定義し, その基本性質を調べた. この射影に対する自由エントロピーの定義を, 一般の非可換確率変数に拡張したものが軌道自由エントロピーである. 定義の本質的なアイディアは非可換確率変数の組に対する微小状態をユニタリの軌道のみから得られるものに制限し, そのユニタリ部分の組を軌道微小状態として定義することにある. 軌道自由エントロピー χ_{orb} はこの軌道微小状態を用いて定義する. このとき, 自由エントロピーは n 個の非可換確率変数 $(X_1,\dots,X_n)$ に対し劣加法的であるが, これに対し軌道自由エントロピーは n 個の非可換確率変数の組に対する自由エントロピーから個々の非可換確率変数の自由エントロピーの和を引いた値, すなわち個々の非可換確率変数の自由エントロピーを除いた n 個の非可換確率変数の間の関係自体がもつ自由エントロピーとして現れてくる:

$$\chi(X_1,\dots,X_n)=\chi_{\mathrm{orb}}(X_1,\dots,X_n)+\sum_{i=1}^{n}\chi(X_i). \tag{1}$$

特に, 2 つの非可換確率変数 X と Y に対し,

$$-\chi_{\mathrm{orb}}(X,Y)=-\chi(X,Y)+\chi(X)+\chi(Y)$$

である. これは, 古典確率論において Boltzmann-Gibbs エントロピーを $H(\cdot)$ としたとき, 相互情報量が $I(X;Y)=-H(X,Y)+H(X)+H(Y)$ と表せることに対応するものである. この関係式は Voiculescu に上記の i^* を導入させる動機となったものであることも強調しておく. 従って, $-\chi_{\mathrm{orb}}(X,Y)$ は古典確率論における相互情報量の自由確率論的対応物であり, さらに, 自由相互情

報量$i^*(W^*(X);W^*(Y))$ ($W^*(X)$ はXにより生成される von Neumann 環) の微小状態を用いたアプローチへの対応物とみなすことが可能である. その他の重要な性質として, $\chi_{\mathrm{orb}}(X_1,\dots,X_n)=0$ と $X_1,\dots,X_n$ が自由独立であることの同値性があげられる. この結果と関係式 (1) を用いることによって, 改めてχの加法性により自由独立性を特徴づけることができる. さらに, 軌道自由エントロピーの利点は非可換確率変数の組から非可換多変数確率変数の組 $(\mathbf{X}_1,\dots,\mathbf{X}_n)$ への拡張が考えられることにもある. しかしながら, 現段階ではこの拡張はいつでも考えられるわけではなく, 各非可換多変数確率変数 $\mathbf{X}_i$ が超有限 von Neumann 環を生成するときに限りうまく定義できることに注意しておく. このとき, $(\mathbf{X}_1,\dots,\mathbf{X}_n)$ を超有限多変数確率変数の組と呼ぶことにする.

最後に, 軌道自由エントロピー次元についても言及しておく. 超有限多変数確率変数による軌道自由エントロピー χ_{orb} の次元対応物として軌道自由エントロピー次元 $\delta_{0,\mathrm{orb}}$ が定義される. このとき, $\delta_{0,\mathrm{orb}}$ と δ_0 の間には (1) と同様の関係式が得られる:

$$\delta_0(\mathbf{X}_1,\dots,\mathbf{X}_n)\le\delta_{0,\mathrm{orb}}(\mathbf{X}_1,\dots,\mathbf{X}_n)+\sum_{i=1}^{n}\delta_0(\mathbf{X}_i). \tag{2}$$

特に, $W^*(\mathbf{X}_i)$ が有限次元であるとき, この関係式は等式として得られる. なお, 上の $\delta_{0,\mathrm{orb}}$ と δ_0 の関係式は, 本博士論文作成中に改良され, 任意の超有限多変数確率変数の組 $(\mathbf{X}_1,\dots,\mathbf{X}_n)$ に対し,

$$\delta_0(\mathbf{X}_1\cdots\mathbf{X}_n)=\delta_{0,\mathrm{orb}}(\mathbf{X}_1,\dots,\mathbf{X}_n)+\sum_{i=1}^{n}\delta_0(\mathbf{X}_i) \tag{3}$$

であることが示された. $\delta_{0,\mathrm{orb}}$ の応用として, 自由エントロピー次元が最大値をとるような射影の組によって生成される von Neumann 環は性質 (Γ) を持たない II_1 型因子環であることを明らかにした. これは, 直ちに射影に対する自由エントロピーが有限であるとき, 同様の結果を導くことがわかる. この結果は, Voiculescu による, 非可換確率変数の組の自由エントロピー次元が 1 より真に大きいとき, 生成される von Neumann 環が性質 (Γ) を持たない II_1 型因子環であることの射影元版である. 証明の手法は Jung によるパッキング数を用いたアプローチをとっている.

第 1 章　基本事項

第 1 章では自由確率論の基本事項の紹介と第 2 章, 第 3 章で必要となる補題を準備する. まず, 自由確率論を展開する枠組である非可換確率空間を用意し, 自由確率論の基本概念である自由独立性を定義している. さらに, 作用素環の自由積を定義し, これがどのように自由確率論とかかわっているかを述べる. これらの準備のもとで, 自由エントロピー及び自由エントロピー次元を定義し基本的な性質を紹介している. もちろん, 自由エントロピー次元が自由群環の非同型問題にどうかかわっているかも説明する. また, 第 2 章, 第 3 章で必要となる概念として, 輸送コスト不等式の定義と基本的な性質, 微小状態の近似に関する補題, 及び Szarek による被覆数の評価と Jung によるパッキング数の評価を準備する.

第 2 章　軌道自由エントロピー

第 2 章では, まず, 軌道自由エントロピーを導入するきっかけとなった射影に対する自由エントロピーを定義する. 軌道自由エントロピーの定義は 2 種類考えられるが, 実はこれらは等価である.

したがって, 射影に対する自由エントロピーがどのように一般化され, 軌道自由エントロピーが導入されることになったかがよくわかる. 次に, 軌道自由エントロピーの基本性質を紹介し, 本論文の主結果の 1 つである関係式 (1) を述べている. 加えて, $\chi_{\mathrm{orb}} = 0$ による自由独立性の特徴づけも与えている. これにより, χ の加法性と自由独立性が同値であることが示される. 証明には関係式 (1) と輸送コスト不等式を用いており, すでに知られている Voiculesu による幾分弱い結果とは別のアプローチをとっている. この章の最後に, 超有限多変数確率変数の組へ拡張した軌道自由エントロピーを導入し, 基本性質を調べる. また, 次章の準備もあわせて行っている.

第 3 章　軌道自由エントロピー次元

第 3 章では, 2 章の最後での準備をもとに, 超有限多変数確率変数の組に対する軌道自由エントロピー次元を導入し, 主結果の 1 つである関係式 (2) を導く. 補遺として, 関係式 (2) を改良した関係式 (3) についても言及する. 最後に, $\delta_{0,\mathrm{orb}}$ の応用として, 自由エントロピー次元が最大値をとるような射影の組によって生成される von Neumann 環は性質 (Γ) を持たない II_1 型因子環であることを示している.

論文審査結果の要旨

1980年代以降、D. Voiculescuを中心に大きな発展を遂げている新種の非可換（＝量子）確率論である自由確率論は、自由群や作用素環の自由積と密接に関係しており、通常の古典確率論の独立性に代わる自由独立性と呼ばれる概念が基本的である。自由確率論と古典確率論の中身が非常に異なっているにもかかわらず、両者の理論構成は驚くほど並行的にできている。実際、自由確率論の発展において、正規分布に対する半円分布、ボルツマン-ギッブス・エントロピーに対する自由エントロピー、フィッシャー情報量に対する自由フィッシャー情報量、ガウス過程に対する自由過程など多くの自由確率アナロジーが発見された。さらに、非可換確率変数に対する漸近モデルであるランダム行列が、その漸近的自由性や固有値分布が満たす大偏差原理を通して、概念的かつ方法論的に重要な役割を自由確率論において果たしている。著者は、ランダム行列や大偏差原理などの手法を駆使し，ユニタリ軌道によるアプローチを用いて、自由エントロピーと自由エントロピー次元の研究を行った。本論文は、それらの研究成果をまとめたもので、序論と全編3章からなる。

序論では、本研究の背景と目的および主要結果の概要を述べている。

第1章は本論である第2，3章のための準備である。自由確率論の基本的事項から始め、自由確率論と不可分な作用素環の自由積、トレース的フォン・ノイマン環からなる非可換確率空間における非可換確率変数に対する行列的マイクロ状態、それを用いて定義される自由エントロピーについて解説している。本論で重要な働きをする輸送コスト不等式の自由確率版についても説明している。次いで、自由エントロピーのある種の微分である自由エントロピー次元とそのパッキング・被覆次元としての定式化について解説し、行列的マイクロ状態の近似と行列空間におけるパッキング・被覆数の評価に関するいくつかの技術的な補題をまとめている。

第2章では、自由エントロピーの軌道アプローチの研究を行った。まず射影作用素の非可換確率変数に対する自由エントロピーの定義から始めて、その一般化として、自己共役作用素の非可換確率変数に対する軌道的自由エントロピーを導入し、その基本性質を導いている。特に、軌道的自由エントロピーと従来の自由エントロピーの間の関係式は有意義な結果である。非可換確率変数の自由独立性に対する軌道的自由エントロピー＝0 による特徴付けは、自由エントロピーの加法性による Voiculescu の特徴付けを改良する重要な知見である。この証明には上述の輸送コスト不等式の自由確率版が用いられる。さらに、軌道的自由エントロピーの定義を生成するファン・ノイマン環がハイパー有限である多変数の非可換確率変数の組に拡張し、上述の特徴付けを一般化している。

第3章では、自由エントロピー次元の軌道アプローチの研究を行った。生成するフォン・ノイマン環がハイパー有限である多変数の確率変数の組に対して、自由ユニタリ・ブラウン運動による摂動を用いて、軌道的自由エントロピー次元を導入し、その基本的性質を導いている。これがパッキング・被覆次元の方法を用いる定義と一致することを証明し、さらに軌道的自由エントロピー次元と従来の自由エントロピー次元との関係を示している。この関係について未解決であった問題が最近著者等によって完全に解決されたことにも言及しているが、これは大きな成果である。最後に、射影作用素の非可換確率変数の組について、自由エントロピー次元が極大の値をとるならば、それらが生成するフォン・ノイマン環が非ガンマ因子環であることを証明している。特に軌道的自由エントロピーが有限ならば、この場合になっている。

以上要するに本論文は、自由確率論の主要テーマである自由エントロピーと自由エントロピー次元に関して、軌道アプローチによる新理論を導入し、従来の理論との関係を確立したものであり、自由確率論並びにシステム情報科学の発展に寄与するところが少なくない。

よって、本論文は博士（情報科学）の学位論文として合格と認める。