

氏名 (本籍地)	熊谷 亘
学位の種類	博士 (情報科学)
学位記番号	情博第 560 号
学位授与年月日	平成 25 年 9 月 25 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当
研究科、専攻	東北大学大学院情報科学研究科 (博士課程) 情報基礎科学専攻
学位論文題目	Statistical and Information Theoretic Analysis for Optimal Local and Global Quantum Operations (最適な局所及び大域的量子操作に対する統計学及び情報理論的解析)
論文審査委員	(主査) 東北大学教授 須川 敏幸 名古屋大学教授 林 正人 東北大学教授 宗政 昭弘 東北大学教授 尾畑 伸明

## 論文内容の要旨

不確実な現象を取り扱う理論として確率論は古くから研究されてきた。そしてその確率論を基に、より実的な現象を扱うための理論として情報理論および統計学が発展してきている。一方、20 世紀初頭に微小なスケールの物理的な振る舞いを記述することができる量子論が誕生した。これにより、不確定性原理や量子相関などのマクロな領域では自然には起こりえない現象が次々と発見された。量子論では物理的対象は量子状態と呼ばれる概念で表され、それは密度作用素という数学的概念によって記述される。密度作用素は確率測度の一種の非可換な拡張を与えるものとみなされるので、確率測度を密度作用素に置き換えることにより、確率論に立脚した理論である情報理論や統計学の量子論的拡張が自然に考えられる。この意味で拡張された情報理論や統計学等は今日では総称として量子情報理論と呼ばれている。量子情報理論の誕生により量子論の最も重要な概念である、複数の量子系間のエンタングルメントと呼ばれる量子相関の定量化が行われた。エンタングルメントを持った量子状態、すなわちエンタングルド状態を生成するためには複数の系の全体にまたがる量子的な大域操作(Global Operation)を施さなければならないが、大域操作は量子系が遠く離れている状況においては実現が困難である。一方で複数の系がそれぞれ個別に量子的な局所操作(Local Operation)をし、それらを電話や電子メールのような古典的な方法で情報をやり取り(Classical Communication)をする操作の組み合わせはそれらの頭文字を取り LOCC 操作と呼ばれる。大域操作は複数の量子系の上の量子的な操作も許しているの理想的な状況を仮定しているのに対し、LOCC 操作は量子系が遠く離れていても大域操作に比べて実現が容易であり現実的な要求を課した状況といえる。本論文では LOCC に着目し、最適な大域操作がどのような状況で LOCC により実現できるかを考察し、また LOCC による量子状態の変換の性能を漸近的な設定の下で解析している。

本論文の前半では、最適な大域操作がどのような状況で LOCC により実現できるかについて統計的な観点から考察している。量子系での統計学として推定の理論が発達しているが一方で、実験的な重要性を持つ統計的手法である仮説検定も重要な研究対象と考えられている。本論文の前半では主に仮説検定を扱っている。量子系での仮説検定は最も解析のしやすい単純仮説の場合が集中的に研究されてきた一方で、現実的な状況で適用可能な一般の複合仮説検定はごく少数の研究があるのみであった。本研究では現実的な状況を仮定するために複合仮説検定の問題を取り扱う。古典仮説検定では、中心極限定理によってガウス分布(正規分布ともよばれる)の重要性が広く認識されており、実際の問題においてもガウス分布で確率現象を近似することが行われてきた。量子系においても量子中心極限定理により、独立かつ同一に用意された量子状態はガウス状態と呼ばれる量子状態で近似されることが知られている。ガウス状態は物理的にはレーザーのような光

にガウスノイズがのった量子状態として表され、実際の光学系で自然に生成される。このように実際の実験系で現れ、かつ中心極限定理によってその重要性が保障されているにも関わらず、ガウス状態に対する仮説検定は単純仮説の場合があるのみであり、複合仮説の場合には扱われてこなかった。それはガウス状態が無限次元の量子系上の量子状態であり、数学的な取り扱いが困難であったためであると考えられる。本研究ではこのガウス状態に対する仮説検定問題において最適な検定方法を導くために、系の群対称性を利用することにより問題を著しく簡単にする手法を発見した。これはガウス状態に関する仮説検定の問題に限らず、アメンブル群で記述される対称性を有する量子系に広く適用できるものである。また無限次元の量子系では複合仮説検定は全く研究されてこなかったが、ガウス状態はこの点に関しては一部の問題を除き関数解析の既存の定理を適用することで問題解決できることがわかった。これらの結果をまとめることにより、ガウス状態の仮説検定の問題に関して最適な検定手法を導出し、大域操作でしか達成しえないのか局所操作によっても達成しうるのかを明らかにした。大まかに述べれば最適な検定手法は、擾乱を表すパラメータが存在する場合には大域操作によって実現され、擾乱パラメータが存在しない場合には LOCC によって実現される。本研究はガウス状態という基本的な対象に関して最適な統計的な手法を構築し、大域的な操作と局所的な操作の境界を与えることができたという点において意義があると考えられる。

本論文の後半では、LOCC による量子状態の変換の性能を情報理論的に解析している。何らかのエンタングルメント状態から所望のエンタングルメント状態を LOCC 操作で近似・生成することが求められる場面は多様に考えられ、その近似・生成の可能性(または不可能性)及び効率が研究されるに至る。これまでなされてきた研究としては LOCC 操作を用いてある量子状態から別の量子状態へ移り変わるための必要十分条件が Nielsen により知られている。すなわち、量子状態から一意的に定まる Schmidt 係数と呼ばれる確率分布に着目することにより、量子状態が LOCC で変換可能であるための必要十分条件は、Schmidt 係数の間に Majorization と呼ばれる半順序が成り立つことと同値であることが示された。さらに Bennett らはエンタングルメント抽出(量子状態を LOCC 操作によって EPR 状態へ変換する手法)を漸近的な設定の下で解析し、その最適な一次の生成レートは初期状態の部分系の von Neumann エントロピーで表されることを示した。また Hayashi らは Bennett らが考察したエンタングルメント抽出に関して、強逆性と呼ばれる情報論的な性質が成り立つことを示した。これらをまとめることで、許容誤差のもとで生成できる EPR の最大個数は漸近的には初期状態の個数に比例し、比例係数は初期状態の部分系の von Neumann エントロピーになることが知られた。しかし本論文では、生成個数がそのような形を持つ場合でも漸近誤差が任意の値を取りうることを示した。本問題を考察する動機は、特定の許容誤差の下で有限個の初期状態から生成できる EPR の最大個数の漸近的な振る舞いを決定することであったので既存研究ではその目的を達成していない。本論文ではこの問題に着目し、それを解決している。すなわち、許容誤差以下で生成できる EPR の最大生成個数の漸近展開公式を求め、かつその形であれば漸近誤差が許容誤差以下にできることを示している。問題を解決するための手法として、本論文では古典情報理論で一様乱数生成の問題に対して用いられた情報スペクトル的な手法を適用した。情報スペクトル的な手法は情報源に特定の仮定を置くことなく変換レートを記述する手法であり、本論文の証明において量子状態は純粋状態であるという以外の(独立同一等の)仮定を置くことなく、最適な変換レートが記述されている。同様に情報スペクトル的な手法を用いることで、エンタングルメント希釈(EPR 状態を LOCC 操作によって他の量子状態へ変換する手法)に対しても最適な変換レートを求めることができた。さらに本論文ではエンタングルメント抽出及び希釈の問題の一般化も考察した。すなわち、既存研究では近似・生成したい量子状態として EPR 状態という特定の状態に焦点をあて研究がなされてきたが、それを一般の状態に拡張した場合にも同様の漸近公式を導出した。この一般化された問題においては情報スペクトルのような既存の手法を適用することが困難であったので、量子状態が独立同一に準備された場合に関して適用できる新たな手法を開発しており、これを用いて EPR 状態ではない一般の独立同一な純粋状態の間の最適な LOCC

による変換レートを導出した。さらに、以上の結果をいくつかの問題に応用した。まず LOCC 及び決定的変換によって対象を記述するという枠組みは、古典情報理論の乱数生成の問題と類似の数学的構造を持っていることが知られており、この知見を用いることによって独立同一な一様でない乱数の間の最適な変換レートを導出することができた。これは量子情報理論の手法を古典情報理論に還元することでなされており、通常とは逆向きの応用であり理論的に興味深いと考えられる。また量子情報理論における応用として、LOCC クローニングの問題を取り扱った。これは特定のエンタングルした純粋状態がいくつかあった場合に、その個数を LOCC のみを用いてある許容精度の下で増やすという問題である。この問題に対して、最適なクローニングレートを導出することができた。さらに別の応用としてエンタングルメント抽出操作の精度が上がれば上がるほど、その後に行える初期状態の復元操作の精度は下がるという結果が得られた。その結果として、エンタングルメント抽出の漸近的な非可逆性を明確なトレードオフ関係を導出することで示した。本研究は許容誤差の下で LOCC のみを用いて、いくつの望む量子状態を用意できるかを問題を二次の漸近論と呼ばれる精密な手法で解析している。二次の漸近論は今日の情報理論において、集中的に研究されている対象であり、その分野への知見を深めることができるという意味で理論的な意義があると考えられる。

## 論文審査結果の要旨

量子情報処理は次世代の情報処理技術として近年注目を浴びている技術である。量子情報処理では、エンタングルメントをはじめとする非局所効果が重要な役割を果たす。例えば量子系から情報を取り出すには測定が必要である。一般に、必要な情報が1つの粒子からなる系にだけ存在することがまれであり、複数の粒子を用いて情報が表現されていることが多い。そのような場合、これら複数の粒子間の非局所効果を用いた測定を用いることでどれだけ情報抽出の性能が向上するか考察することは量子情報処理において重要なテーマである。また、非局所効果を持つ状態であるエンタングル状態に対してどこまで効率的な操作が可能であるかという問いも重要なテーマとなっている。著者は、この2つの問題について、数学的な視点から厳密な理論を構築し、その解析を行ってきた。本論文はその成果をまとめたもので、全編8章からなる。

第1章は序論であり、第2章では、準備として論文中で用いる量子力学系の基本概念について述べている。第3章以降で本論文の成果を述べているが、その内容は次の2つに大別される。

前半では、非局所効果を用いた測定を用いることによる情報抽出の性能向上について扱うために、量子仮説検定について取り組んでいる。第3章では、量子仮説検定の定式化及び解析に必要な既存の知識についてまとめている。第4章では、正規分布の量子版である量子ガウス状態に注目し、 $\chi$ 二乗検定、 $t$ 検定、 $F$ 検定の量子版となる検定について扱っている。古典系では、これら3種の検定はその設定の自然さから最も標準的なものとして用いられている。しかし、従来の量子仮説検定の研究ではこのような標準的な場合についての研究は一切なかった。本研究は、このような量子系での極めて自然な3種の検定を初めて扱ったものである。その結果も、どのような場合に、測定過程における非局所効果が有効であるか整理されており、大変興味深い。そして、第5章では、推定として最適な測定を行った場合との比較を行っている。その結果、幾つかの設定においては、仮説検定という目的に特化した測定を行った方が著しくその性能が向上することが示された。

後半では、エンタングル状態の変換操作について取り組んでいる。第6章では、エンタングル状態の変換操作に関連が深い確率分布の変換についての漸近理論を扱っている。確率分布の変換には、決定論的関数による変換と、Majorization条件を満たす変換があり、通常は前者を考えるが、後者はエンタングル状態の変換操作と関連が深い。従来研究では、双方のタイプの変換において、異なる2つの確率分布の独立同一分布に従う確率変数の間の変換は、そのエントロピーレートで特徴付けられていた。すなわち、その変換レートはそのエントロピーの比で表されていた。しかし、より精緻な評価のためには、2次のオーダーの議論が必要となる。本研究では、新たに変換レートの2次のオーダーの最適係数を求め、それが双方の設定で一致することを示した。第7章では、確率分布の変換の議論を用いて、エンタングル状態の変換操作について扱った。さらに、特殊な場合であるエンタングルメント集中化について、その非可逆性を表す基準量を定義し、その計算方法を与え、その漸近的振る舞いについても詳細に調べた。これらの成果は従来の手法では解決できなかった内容であり、大変興味深く高く評価できる。

第8章は結論で、成果をまとめ、今後さらに研究を進めるべき課題について明解に述べている。

なお、付録では本文中で述べられた定理などの数学的命題について厳密にその証明が与えられている。

以上要するに本論文は、量子系の非局所効果について、測定、状態変換の2つの視点から深く研究したものであり、量子情報処理の発展に寄与するところが少なくない。

よって、本論文は博士（情報科学）の学位論文として合格と認める。