氏名（本籍地）	山本　博（やまもと　ひろし）
学位の種類	博　士（情報科学）
学位記番号	情　博　第　５０２　号
学位授与年月日	平成２３年　３月２５日
学位授与の要件	学位規則第４条第１項該当
研究科、専攻	東北大学大学院情報科学研究科（博士課程）情報基礎科学専攻
学位論文題目	Geometric Study of Analytic and Harmonic Functions in the Unit Disk （単位円板上の解析函数および調和函数の幾何学的研究）
論文審査委員	（主査）東北大学教授　須川　敏幸 東北大学教授　久保　英夫　　東北大学教授　藤原　耕二 東北大学教授　日合　文雄

論文内容の要旨

第１章　導入

Ⅰ．解析函数　　単位円板上の解析函数による補間問題とは，与えられた離散的な関係を満足する解析写像の存在を判定する問題で，1910～20年代にはPickとNevanlinnaによって理論上の解決をみており，解となる写像の構築手法も与えられている．しかしその手法は計算が面倒で一目で解の有無を判定できるものではなく，与えられた問題を数値的手法で解決する用途以外ではさほど有効ではない．数学的にはよりわかりやすい単純な判定条件を見出すことが命題となる．今回は条件を反時計回りの円周上に均等に分布する点を時計回りの円周上に均等に分布する点に写す場合に限定して単純明快な判定式を得た．

Ⅱ．調和函数　　幾何学的函数論においては領域を単位円板上の単葉函数で特徴付けることが重要な研究テーマの一つである．この分野の研究は解析関数に関してはかなり研究が進んでいる一方で，単位円板上の複素数値調和函数については解析函数ほどには研究が進んでいない．特にclose-to-convexと呼ばれる領域に関してはほとんど何もわかっておらず，1984年のClunieとSheil-Smallの結果から大きな進展がない状態である．今回はこの向きを保つ単葉調和函数のある部分族がclose-to-convex函数の族となることを示し，その族の変動領域を精確に計算し具体的に書き下すことに成功した．

第２章　補間問題

解析函数とは何か，補間問題の歴史的背景と現状を説明し，工学的側面からなぜ今でも補間問題が重要なのかを示す．今回の結果の元となった補間条件を一般化し，その証明を与える．原像領域の円周の半径をr，写像領域の円周の半径をsとしたとき結果は

$$s \leqq r^{n-1}$$

で表される．ここでnは与えられた点の対の個数である．

第３章　調和函数

幾何学的函数論では領域の特徴付けを，単位円板をその領域に写す（単葉）写像の性質で行うことがテーマの一つである．たとえば単位円板を close-to-convex 領域へ写す写像は close-to-convex 函数と呼ばれ重要な研究対象の一つである．さて単連結領域上の複素数値調和関数は正則部と反正則部に分割できることが知られており，反正則部が恒等的に０である調和函数が解析関数である．このように解析関数と調和関数は近い関係にあるものの，close-to-convex 函数において（単葉な）解析函数ではよく知られていることでも，（単葉な）調和関数では知られていない事柄が多々ある．凸函数や星状函数においても研究の進度に差があるが，close-to-convex 調和関数についてはその特徴付けはほとんどわかっていないに等しい．そこでまずは解析関数と調和関数の比較をすることで，既知の結果の差異を示し，また調和函数について知られている定理を紹介する．

第４章　変動領域

今回は close-to-convex 調和関数の部分族について変動領域を計算した．調和関数の部分族として正則部の微係数の実部が反正則部の微係数の絶対値を上から抑えている部分族を考える．この部分族はある条件を満たさなければ定数写像０しか元にもたないことが今回証明され，またこの部分族が０元以外を含む場合の元を具体的な式で表すことに成功した．この結果を用いて部分族の変動領域を精確かつ具体的に計算することに成功した．

第５章　付録

本文中で使用した記号の一覧

（謝辞，参考文献）

以上

論文審査結果の要旨

単位円板上の正則函数は，それ自体が幾何学的函数論におけるもっとも重要な研究対象であるほか，ベキ級数の理論や Hardy 族や Bergman 空間など種々の函数空間を含み応用範囲も広い．近年は，幾何学的函数論の立場から解析函数よりさらに広い（複素数値）調和函数の族を単位円板上で考え研究することが行われてきている．これはもちろん古典的なフーリエ級数論にも直接的な応用を持ち得るが，函数自体の単葉性など幾何学的性質により関心が集まっている．本研究は大きく分けて２つの部分からなり，前半では補間問題としてもっとも重要なもののうちの一つである Nevanlinna-Pick の補間問題を，後半では単位円板上の調和な近接凸型函数であるための十分条件およびその条件を満たす函数族が主に研究されており，それぞれにおいて新しい結果が得られている．本論文は全編が英文で書かれており，以下のように全５章からなる．

第 1 章は序論であり，本論文の概要が述べられている．

第 2 章では単位円板上の補間問題について述べられ，Nevanlinna-Pick による定理が紹介されている．Nevanlinna-Pick 補間問題の可解性は対応する Pick 行列の半正値性によって特徴付けられることがその主な主張であるが，具体的に与えられた Pick 行列が半正値であることを手計算で厳密に検証することは必ずしも容易ではない．本章では，サンプル点がある円周上に規則的に並んでいるという特別な場合について，その半正値性を円の半径によって記述することに成功しており，これは Baribeau-Rivard-Wegert による 2009 年の論文にあるサンプル点の個数４の場合の結果の一般化になっている．また，実際に解となる函数の数値シミュレーションが行われており，いくつかのコンピュータグラフィックスも与えられている．

第 3 章は単位円板上の複素数値調和函数の幾何学的理論の紹介であり，特に解析的な場合の星型，凸型，近接凸型函数の概念が調和の場合にどのように自然に拡張されるかがまとめられている．なお，調和函数の場合には近接凸型であるための解析的な特徴付けが知られていないことがこの方面の研究の困難な点であることが指摘されている．

第 4 章では本研究により新たに得られた調和函数が近接凸型になるための十分条件が与えられ，その条件を満たす函数族が詳しく研究されている．十分性の証明の後は，さらにその族に対して変動領域が非常に詳しく記述される．その部分が本研究においてもっとも重要な寄与であり，このことからさらにその族に属する函数の増大度評価や歪曲評価など，重要な性質が原理的には導かれることになる．

第 5 章は付録であり，記号表がまとめられている．

Nevanlinna-Pick の補間問題は制御理論など応用範囲も広い問題であり，調和函数の幾何学的性質の究明はフーリエ解析など古典的な理論への応用も期待される．よって，本論文における成果は情報基礎科学および数学の発展に寄与するところが少なくない．

よって，本論文は博士（情報科学）の学位論文として合格と認める．