氏名（本籍）	猪岡　光（宮城県）
学位の種類	工学博士
学位記番号	工博第１７０号
学位授与年月日	昭和４４年３月２５日
学位授与の要件	学位規則第５条第１項該当
研究科専門課程	東北大学大学院工学研究科 （博士課程）機械工学専攻
学位論文題目	線形系の最適制御に関する研究
論文審査委員	（主査） 教授　畑中　浩　教授　斎藤　秀雄 教授　福島　弘毅

論文内容要旨

まえがき

制御理論は従来の伝達関数を中心としたいわゆる古典理論より，状態空間法に基づく新しい理論へと転換し，最適制御理論はその中心として発展してきた。しかし，その発展があまりにも急速であったためか，様々な問題があまり考慮されずに放置されているように思われる。例えば，評価関数，解の求め方，また制御系の構成の仕方等において，検討せねばならない多くの問題がある。最適制御理論が実際の工学分野において有効な働きをするためには，これらの点を考慮に入れて最適制御理論を見直していくことが是非必要であると思われる。本論文では線形系の最適制御理論を取上げ，二つの側面からこの理論の不足している点を補い，その工学的価値を高めることを試みる。すなわち第１部では評価関数の面から，第２部では最適制御系の構成の面から考察する。

第1部　線形系の最適制御と非可制御評価関数

第1章　緒　　言

最適制御理論は，その応用の土台として，プラントの数学的モデルと評価関数が必要である。これらのうち評価関数についてはあまりまとまった理論がなく，恣意的に選ばれることが多い。このような問題に対してKalmanは逆問題という考え方を提唱した。その際に評価関数のもつ任意性が指摘されたが，測度としてふさわしい評価関数の集合を求めることがまず必要であると思われる。ここでは，二次形式評価関数の範囲で，制御入力に一意的に影響する有効な評価関数について考察する。

第2章　線形系の最適制御

ここで扱うプラントは，状態空間における数学的モデルが次式で与えられるものとする。

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t) \tag{1}$$

ここに，$x(t)$： n次元状態ベクトル，$u(t)$：r次元入力ベクトル

$A(t)$, $B(t)$ ： 各々$n\times n$, $n\times r$の係数行列

二次形式評価関数として次式を考える。

$$J_1 = \frac{1}{2}x'(T)Fx(T)+\frac{1}{2}\int_{\tau_0}^{T}[x'(\tau)Q(\tau)x(\tau)+u'(\tau)R(\tau)u(\tau)]\,d\tau \tag{2}$$

ここに，F：$n\times n$非負定定数行列，　$Q(t)$：$n\times n$非負定行列

$R(t)$：$r\times r$正定行列

プラント(1)に対して評価関数(2)を最小にする最適入力が，入力の大きさに制限をおかない場合，Riccati 形微分方程式の解により構成されることはよく知られている。ただし，状態ベクトルのすべての成分が測定可能ではない場合には，他の方法，例えばパラメータ最適化を行なわねばならない。

第3章　線形系の逆問題

最適制御における逆問題とは，入力を前以て指定し，それが最適入力となるような評価関係を見出そうとすることである。二次形式評価関数の範囲で考えるとこの解は容易に求められる。その際解となる評価関数は，与えた入力に対応する部分と，入力が零の場合に対応する部分との和になる。すなわち，与えた入力とは無関係な項が入り，そこにある任意性を生じる。

第4章　可変係数系の非可制御評価関数

前章の考察に基づき，入力が零の場合，すなわち自由軌道に対応する評価関数を(2)の形で求める。

$$B'(t)\ \bar{K}(t) = 0 \tag{3}$$

を満足し，各要素が連続な二次微分をもつ対称行列 $\bar{K}(t)$ が存在すれば，

$$\bar{F} = \bar{K}(T) \tag{4}$$

$$\bar{Q}(t) = -[\dot{\bar{K}}(t) + \bar{K}(t)A(t) + A'(t)\bar{K}(t)] \tag{5}$$

と求められる。この自由軌道に対応する評価関数か，この種の最適制御問題において最適入力の決定に影響しない。いわゆる非可制御評価関数になっていることが容易に証明できる。すなわち評価関数(2)において，F を $(F+\bar{F})$ に，$Q(t)$ を $[Q(t)+\bar{Q}(t)]$ に変えても最適入力は変化しない。

第5章　定係数系の非可制御評価関数

今迄の議論はプラントが定常な場合，すなわち(1)の係数行列を定数行列でおきかえた定係数系

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\,u(t) \tag{6}$$

であってもそのまま成立するので特に取上げないが，ここでは制御区間が $(0, \infty)$ になった場合について考える。評価関数は次式で与えられるものとする。

$$\bar{J}_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} [x'(\tau)Qx(\tau) + u'(\tau)R\,u(\tau)]d\tau \tag{7}$$

ここに，　Q，R：各々 $n \times n$，$r \times r$ の正定定数行列

この場合の非可制御評価関数は，

$$B'\bar{K} = 0 \tag{8}$$

を満足する対称行列 $\bar{K}$ により

$$\bar{Q} = -(\bar{K}A + A'\bar{K}) \tag{9}$$

と表示できる $\bar{Q}$ により構成される。なお，この $\bar{Q}$ は，早勢の Q マトリクスと密接な関係をもち，それとは異なった立場より定係数系を特長づけるものである。

第6章　結　　言

非可制御評価関数を求めることにより，有効な評価関数に関して考察を加えた。

非可制御評価関数はそれを求める過程より明らかなように，プラントの方程式の係数行列により完全に決定され，そのプラントに固有なものである。その形により，そのプラントが一意的に評価できる量が直ちに分かる。

第2部　状態空間と周波数領域における最適制御系の構成

第1章　緒　　言

線形定係数系の取扱いには，従来からの周波数領域における手法と，状態空間における手法とが存在する。二次形式評価関数に基づく最適制御は，第1部で述べたように状態空間法により多く扱われているが，そこで構成した最適制御系の周波数領域での解釈について，また周波数領域における最適化の手法との比較等において不明の点が多い。ここでは状態空間における解析法を土台として，二つの手法の基本的な立場を明確にすることを試みる。

第2章　状態空間における制御系の解析

線形定係数系に対する従来の手法を含むような形で状態ベクトルを定義する。そのため微分方程式を超関数の立場より解釈し，さらに超関数のラプラス変換を導入する。また制御対象がいくつかの部分システムよりできているときには，その結合の仕方により二つの場合にわけて，全体の合成系の状態ベクトルを定義することができる。

第3章　周波数領域における最適制御系の構成

制御対象の入力uを出力yが次の微分方程式で与えられているものとする。

$$L(p)y = M(p)u \qquad (10)$$

ここに，L(p)，M(p)は，各々pのn次，m次の多項式であり，pは超関数の意味での微分演算子である。適当なn次元状態ベクトル$\mathbf{x}(t)$を導入すると，この系の状態方程式は(6)の形になる。二次形式評価関数(7)に基づく最適入力は，n次元ベクトルkにより次の形で与えられる。

$$u(t) = -k'\mathbf{x}(t) \qquad (11)$$

従って最適制御系は(11)を(6)に代入することにより得られる。ここで 閉ループ伝達関数をFig 1 の外部入力rより出力yへの伝達特性として定義する。

さて伝達関数によるフィードバック系をFig 2 のように構成し，伝達特性が先のと一致するようにフィードバック要素H(s)を決定する。このようなH(s)は，特定の初期値のもとでの周波数領域における最適化の手法によっても求められる。

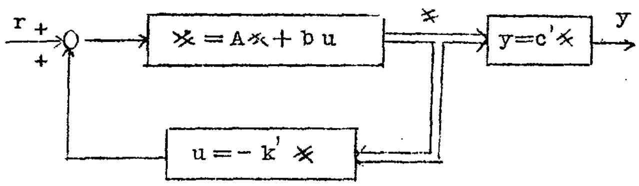

Fig.1

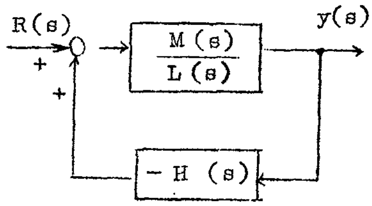

Fig.2

第４章　状態空間における合成系の解析

結合の仕方により二つの場合にわけて，Fig.2 の系を第２章の理論により解析する。第１に制御が開始されるときに，結合が行なわれる場合で，そのとき合成系の状態空間は（2n−1）次元となる。従ってFig.1 の系とは全く別な系となり，応答も一般に異なる。ただしすべての初期値を零とおいた場合の外部入力による応答のみは一致する。

第２に最初から結合されている場合で，そのとき合成系の状態空間は（n+m）次元となる。従ってm＝0の場合を除いては，Fig.1の系とは別な系になる。

前と同様応答も一般に異なる。なおこの系は可観測ではない。

周波数領域での最適化は，この第２の結合の仕方に基づいている。従って上記の解析によりその特長を明らかにすることができる。

第５章　例　　題（略）

第６章　結　　言

伝達特性のみに注目して周波数領域で構成した系が，状態空間での最適制御系と一般には全く別な系であることを示した。同時に，周波数領域における最適化の手法により構成した系が，前提とする初期値により異なる系となる理由を明らかにした。

以上線形系の最適制御理論を二つの側面から補うことを試みたが，これらの方向における一層の努力が必要と思われる。すなわち，有効な評価関数についてのより一般的な考察，物理的要求と評価関数の関係，また個々の制御対象特有の最適系の構成法等について研究されねばならない。これらの考察が充分に行なわれてはじめて，最適制御理論が工学分野における有力な手段となることができるのではないだろうか。

審 査 結 果 の 要 旨

最適制御系の設計は制御工学における最も重要な課題の一つである。この解決のために，伝達関数を中心とする古典制御論の立場，あるいは状態空間における系の挙動を中心とする現代制御論の立場から従来多くの理論的研究が行なわれてきた。しかしながら，解析上の困難のために最適制御系の構成に関してはなお多くの未解明の問題が残されている。

本論文は線形最適自動制御系について，現代制御論の立場から，制御の良さを示す評価関数と最適制御系の構成との関係を明らかにするとともに，伝達関数による最適制御系の構成について精細な検討を行なうことを目的としたもので，全編2部12章と附録よりなる。

第1部は評価関数に関するものである。第1章は緒言である。第2章では二次形式評価関数をもつ線形系の最適制御問題について，その定式化を行ない，最適入力を求め，さらに検討を加えている。第3章では最適入力と評価関数の関係について考察を加え，その対応が一対一でなく，最適入力の決定に影響を与えない非可制御評価関数の存在することを指摘している。第4章では制御対象の自由軌道に対応する評価関数が非可制御評価関数を構成していることを示し，さらにその構成を明らかにしている。これは重要な知見である。第5章では実用上重要な定係数系について前章と同様の取り扱いを行ない，その構成を明確にしている。第6章は緒言である。

第2部は最適制御系の構成に関するものである。第1章は緒言である。第2章では後章において必要な基礎理論を展開している。第3章では状態空間における最適制御系と，対応する伝達関数による最適制御系の構成を示している。第4章では前章で導いた両最適制御系について詳細な検討を行ない，その応答は一般に異なること，さらに状態空間において構成された最適制御系は可観測であるが，伝達関数により構成された最適制御系は一般に可観測ではないことを示している。これは注目すべき新しい知見である。第5章では二次系に対して前章までの理論の応用を示している。第6章は結言である。

ついで附録では本文中必要な公式の誘導を行なっている。

以上本論文は線形最適自動制御系について，その構成ならびに評価関数と最適制御系の構成との関係を解明したものであって，制御工学の発展に寄与するところが少なくない。

よって，本論文は工学博士の学位論文として合格と認める。