氏　名（本籍）	高　浪　五　男（宮城県）
学位の種類	工　学　博　士
学位記番号	工　博　第225号
学位授与年月日	昭和45年3月25日
学位授与の要件	学位規則第5条第1項該当
研究科専門課程	東北大学大学院工学研究科 （博士課程）電気及通信工学専攻
学位論文題目	オートマトンに関する研究
論文審査委員	（主査） 教　授　本多　波雄　教　授　大泉　充郎 教　授　城戸　健一　助教授　木村　正行

論　文　内　容　要　旨

は　し　が　き

オートマトン理論や形式言語理論における入力語またはストリング（string）はアルファベットΣから作られる語，すなわちΣの上の自由半群（モノイド）の元として与えられ，オートマトンはテープ上の記号（Σの元）をつぎつぎに走査してゆく。また，文法においては非終端記号を規則にしたがって置き換え，ストリングを並置（concatenation）してゆく。この並置はΣの上の自由半群における2項演算である。

これらのことを考えるとき，Σの元は単位の長さをもっていると考えることができる。この"単位の長さ"というものをより一般的に考え，単位の長さという概念を導入できうる半群（モノイド）すなわち長さをもつ半群（モノイド）に注目して議論を進めてゆくならば，一般のオートマトン理

論で用いられている語のなす半群(モノイド)をも含めて，統一的な理論が構成できるものと考えられる。本論文はこのような立場から，つぎのように構成されている。

第1章　長さをもつ半群の上の方程式とその形式言語への応用

集合Sに2項演算'・'が定義され，この演算に関して半群になるとき，これを(S・)と書く。右(左，両側)モノイドとは右(左，両側)単位元をもつ半群をいう。

(S・)を半群，Rを非負整数の集合，LをSからRの中への関数とする。Sの任意の元x，yに対して，

$$L(x\cdot y)=L(x)+L(y) \tag{1}$$

の関係を満たすとき，(S・)を長さをもつ半群(L−半群)といい，L(x)をxの長さと呼ぶ。特に，(S・)が右(左，両側)モノイドで，任意の単位元eに対してL(e)＝o，単位元以外の元xに対してL(x)＞oであるとき，(S・)を長さをもつ右(左，両側)モノイド(以下，L−右(左，両側)モノイドと書く)という。

(S・)をL−モノイドとする。Sの部分集合A，Bに対して，$A\cdot B=\{a\cdot b \mid a\in A, b\in B\}$，$A+B=A\cup B$と定義する。このとき，

$$X=A\cdot X+B \tag{2}$$

を満たす$X\subseteq S$を式(2)の解と呼ぶ。

式(2)の解の存在と一意性および最小解(集合の包含関係の意味で最小)について論じる。ついで，式(2)が行列方程式となる多変数の場合について，その解の存在と一意性および最小解(行列の各成分ごとに最小である)について論じ，これの一般解を与える。

つぎに，

$$X=A\cdot X+X\cdot B+C \tag{3}$$

なる方程式を考え，これの解の存在と一意性を論じる。

形式言語への応用は，これらの式の解のうちで最小解が特に意味をもつので，この最小解を求めるためのいくつかの公式を与える。

L−モノイド(S・)がつぎの性質をもつものとする。Sの任意の元x，y，u，vについて，$x\cdot y=u\cdot v$でL(x)＝L(u)またはL(y)＝L(v)ならばx＝uかつ，$e\cdot y=e\cdot v$である。ここにeはある固定した単位元である。このような性質をもつ(S・)について，'∩'演算を定義し，応用上有効ないくつかの結果を示す。

以上の結果の応用例として，(i)通常のオートマシン理論で取扱われている自由モノイド($\Sigma^*\cdot$)，(ii)自由モノイド($\Sigma^*\cdot$)において，k_1，k_2を与えられた互いに素なる正整数とする。Σ^*の元

yに対して，$y=y'\cdot\varphi_y\cdot y''$ ($L(y')/L(y'')=k_1/k_2$, $L(\varphi_y)<(k_1+k_2)$)によってyを分解し，$x^o y=y'\cdot x\cdot y''$によって演算oを定義すれば，($\overset{*}{\Sigma}$ o)はL－右モノイドとなる。線形文法G＝(V , Σ , σ , P)において，($\xi\to x$) $\in$ Pならば，$x\in\overset{*}{\Sigma}$か，$x=x'\cdot\gamma\cdot x''$, $\gamma\in V-\Sigma$で$L(x')/L(x'')=k_1/k_2$なる条件を満たしている文法のクラスはこのモノイドの上で特性化される。(iii)自由モノイド($\overset{*}{\Sigma}\cdot$)の直積($\overset{*}{\Sigma}\times\overset{*}{\Sigma}\cdot$)はやはりL－モノイドとなる。任意の線形文法Gをこのモノイドの上の行列方程式で表わし，Gの導出言語の集合と方程式の解の対応を述べる。(iv)線形文法から構成される行列方程式が自由モノイド($\overset{*}{\Sigma}\cdot$)の上で式(3)の形に表わされるときは，この文法の導出言語は正規集合となる。

つぎに，prefix(suffix)に依存する長さをもつ半群(S・)(以下，PL－半群と略す)をつぎのように定義する。Rを非負整数の集合，ΓおよびψをSからRの中への関数とするとき，つぎの関係を満たすものをいう。

$$\Gamma(x\cdot y)=\Gamma(x)+\psi(x)\Gamma(y) \tag{4}$$

ここに，関数Γ，ψについて，$\Gamma(u)\neq 0$, $\psi(v)\neq\psi(w)$なるSの元u , v , wが存在するものとする。

このPL－半群の上の線形(行列)方程式X＝A・x＋Bの解の存在と一意性を論じる。応用例として，コンテキストフリー１変数文法GからPL－半群の上の行列方程式を構成し，Gが生成する導出言語とこの方程式の解との対応について述べる。

第２章　長さをもつ可換半群によるParikh定理と準線形集合の特性化

半群(S・)において，Sの任意の元x・yについて，x・y＝y・xが成り立つとき，(S・)を可換半群と呼ぶ。長さをもつ可換半群(モノイド)も第１章におけると同様に定義される。この章では(S・)は長さをもつ可換モノイドとする。

記法；A⊆Sについて，$\overset{*}{A}=\{e\}+A+A\cdot A+\cdots\cdots$ (eは単位である)

(S・)の上の１変数高次方程式

$$X=A_1X^{n_1}+\cdots\cdots+A_tX^{n_t}+B \qquad 各\ n_i\geq 1,\quad 各\ A_i, B\subseteq S\cdot$$

さらにはもっと一般的な方程式

$$\begin{aligned}X=&A_1X^{l_1}(B_{11}X^{m_{11}})^*\cdots\cdots(B_{1k}X^{m_{1k}})^*+\cdots\cdots\\&A_tX^{l_t}(B_{t1}X^{m_{t1}})^*\cdots\cdots(B_{tk}X^{m_{tk}})^*+C\end{aligned} \tag{5}$$

$$(各\ l_i\geq 1\ ,\ 各A_i\ ,\ B_{ij}\subseteq S)$$

について，その解の存在と一意性を論じ，これの最小解を与える。つぎに，多変数の場合，すなわち，$x_1\cdots\cdots,x_n$を変数とする連立方程式

$x_i = f_i(x_1, \cdots\cdots, x_n)$　　　$(i = 1 \sim n)$

（各 f_i は式(5)の形をしている。）

の最小解を求める方法を示す。

ここで，コンテキストフリー文法理論における準線形集合を考える。$R^n = \{(a_1, \cdots\cdots, a_n) \mid a_i \geq 0$ なる整数，$i = 1 \sim n\}$ とする。R^n の元 $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_n)$，$\mathbf{b} = (b_1, \cdots, b_n)$ に対して，演算・をつぎのように定義する。

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1 + b_1, \cdots, a_n + b_n)^{(*)}$

元 $\mathbf{a}$ に対して，長さを $L(\mathbf{a}) = a_1 + \cdots + a_n$ と定義すれば，$(R^n \cdot)$ は長さをもつ可換モノイドとなる。$A, B \subseteq R^n$ に対して，演算・と $\dot{+}$ と $*$ を $A \cdot B = \{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \mid \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B\}$，$A \dot{+} B = A \cup B$，$\overset{*}{A} = A^0 \dot{+} A \dot{+} A^2 \dot{+} \cdots$ $(A^0 = \{(0, \cdots, 0)\})$ によって定義する。$C, P \subseteq R^n$ とするとき，$L(C; P) = C \cdot \overset{*}{P}$ とする。$L(C; P)$ において，C が1個の元からなる集合で，かつ P が有限集合のとき，$L(C; P)$ を線形集合といい，さらに線形集合の有限個の和集合を準線形集合という。　　　　（脚注　ここの＋は整数の加法を意味する。）

このとき，つぎのことが成り立つ。

R^n の準線形集合は R^n の有限集合に・と $\dot{+}$ と $*$ の演算を有限回ほどこして得られる最小の族である。

$G = (V, \Sigma, \sigma, P)$ をコンテキストフリー文法とし，$\Sigma = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ とする。$x \in \Sigma^*$ について，$\varphi(x)$ は R^n の元で，その第 i 成分は x が含む文字 α_i の個数とする。G が生成する言語 $L(G)$ について，$\{\varphi(x) \mid x \in L(G)\}$ は準線形集合である（Parikhの定理）。このことをこれまでに得られた結果を用いて証明する。この方法によれば，導出木による面倒な方法によらないで定理が導出されるとともに，公式によって解を機械的かつ簡単に求めることができる。

第3章　長さをもつ半群の上の有限オートマトン

$(\Sigma^* \cdot)$ を自由モノイドとする。現在広く研究されているオートマトン理論においては，Σ^* の元である入力語はまず生成系 Σ の元からなる系列に分解され，この Σ の元がつぎつぎにオートマトンに与えられると考えることができる。また，この生成系による分解は唯一であり，Σ の各元は単位の長さをもっていると考えることができる。

このような観点から，その生成系が有限集合で，かつそれによる分解が唯一であるようなアルゴリズムが存在する抽象的半群 $(S \cdot)$ を考え，生成系によって分解された S の元を入力系列とするような有限オートマトンについて考察する。このようなオートマトンを長さをもつ半群 $(S \cdot)$ の

上のオートマトンと呼び，これにより受理されるSの部分集合を（S・）一正規集合という。通常の有限オートマトン理論における同様の結果が，合同関係，唯一の最小オートマトン，閉包の性質および決定問題等について得られる。これらの結果の応用として，基本の半群を前述の自由モノイド（Σ^*・）とし，帰納的に長さをもつ半群の無限系列を構成する。このとき，真の包含関係に関してその最小のクラスが正規集合のクラスであるようなΣ^*の集合のクラスの無限鎖が存在し，かつ各クラスは正規集合と同様の性質をもっていることを示す。ついで，これらのクラスのほとんどはコンテキストフリー言語のクラスに含まれないが，決定性リニアバウンデットオートマトンによって受理される言語のクラスの真の部分クラスであることを示す。また，（Σ^*・）から直接に構成される任意の半群（$\Sigma^* o\, k_1 / k_2$）について，（$\Sigma^* o\, k_1 / k_2$）一正規集合のクラスの閉包的性質を考察する。

む　す　び

第1章および第2章では，長さをもつ半群，Prefixに依存する長さをもつ半群，および長さをもつ可換半群（モノイド）の上の方程式の性質を論じ，これを形式言語理論へ応用した。

この方程式論は半群の理論にも役立つものと思う。第3章ではその遷移が状態と長さをもつ半群の生成系とによって定まる有限オートマトンの性質を論じ，その結果をオートマトン理論へ応用して，正規集合の拡張といえる興味あるクラスが存在することを示した。この章は入力系列としてオートマトンへの入力の仕方に対して一つの考えを与えるものと思う。

本論文は，長さなる概念を抽象化することによって一般的な理論が構成できることを示している。

審 査 結 果 の 要 旨

オートマトン理論と形式言語理論は情報処理機械の能力を研究する学問である。有限オートマトンはもっとも基礎的なオートマトンであり，その受理する入力集合は正規集合（片側線形言語）であることが知られている。入力集合は有限アルファベットからつくられる語の集合であるが，これは長さをもつ自由半群と考えることができる。著者はこの長さをもつ自由半群を拡張して，長さをもつ半群を定義し，この半群を入力とするオートマトンと，その受理する入力集合の性質を研究し，オートマトン理論の新しい分野を開拓した。本論文はその研究成果をまとめたもので3章よりなる。

第1章ではまず長さを持つ半群を定義し，この半群の性質を調べている。ついで正規集合が，自由半群上の線形方程式の解であることに着目して，長さをもつ半群上の線形方程式を定義し，その解の存在性と一意性を論じ，解を求める手法を与えている。さらにより一般的な半群として，プレフイックス（サフイックス）に依存する長さをもつ半群を定義し，この半群上の線形方程式の性質を論じている。上記の結果の応用として，正規集合を拡張したある種の線形言語が線形方程式の解として導出されることが示されている。本章の結果は独創性の高いもので本研究の出発点となっている。

第2章では長さをもつ半群が可換半群であるとき，その半群上の高次方程式の解を求める手法を与え，解の一意性を論じている。ついで半群上の形式文法と言語を定義し，上の結果を用いて，形式言語の重要な類であるコンテキスト・フリー言語の特性を論じている。

第3章では長さをもつ半群を入力とするオートマトンを定義し，このオートマトンによって受理される入力集合の性質を解明している。まずこの入力集合が正規集合と類似の性質をもつことを示し，この集合をS－正規集合と定義している。ついで自由半群を基本の半群として，帰納的に長さをもつ半群の無限列を構成し，自由半群上の正規集合を包含関係について最小の類として，各半群上でS－正規集合の類の無限列が存在することを示している。この結果は正規集合の類を包含する大きな類で，正規集合と類似の性質をもつものが無限に存在することを示すものであり，オートマトン理論に新しい発展方向を与えたものである。

以上要するに，本論文は長さをもつ半群を入力集合とするオートマトンを定義して，その性質を解明し，オートマトン理論の新分野を開拓したものであって情報工学の発展に寄与するところが少なくない。

よって，本論文は工学博士の学位論文として合格と認める。