氏 名(本籍)	倉 茂 道 夫(新潟県)
学位の種類	工 学 博 士
学位記番号	工 博 第 272号
学位授与年月日	昭和46年3月25日
学位授与の要件	学位規則第5条第1項該当
研究科専門課程	東北大学大学院工学研究科 (博士課程)機械工学第二専攻
学位論文題目	ゴム状弾性体の軸対称増分変形の力学に関する研究
論文審査委員	(主査) 教授 渥美 光 教授 横堀 武夫 教授 玉手 統 教授 斎藤 秀雄 教授 八巻 昇

論 文 内 容 要 旨

序 論

有限変形の状態にある物体(弾性体,塑性体,粘弾性体)が,さらに微小な変形をうける場合,この微小な変形,すなわち増分変形による変位の増分・ひずみの増分・応力の増分に関して,運動方程式・境界条件式・構成方程式等を導き,物体の種々の力学的挙動を明らかにしようとする固体の力学(solid mechanics)の一分野を増分変形の力学(mechanics of incremental deformations)と呼ぶ。

増分変形の力学は,一般的な弾性安定論に関連して,その研究が始まり,近年,有限変形理論の発展にともない,有限変形の安定性・解の唯一性に関連して,その基礎理論は急速に発展してきた。

一方，この基礎理論は，これまで多くの具体的な力学的現象の解析に適用されてきた。例えば，半無限体の表面座屈（ surface buckling ），異方性板の内部座屈（ internal buckling），異方性板の引張りによるせん断座屈（ shear instability ），球や円柱の初期変形の振動に及ぼす影響，調和波の伝播に及ぼす初期変形の影響，異方性材と初期変形をうけている物体の間のwave front shapeの相似性，等々，現象的・物理的に興味ある多くの問題が解析されてきている。

しかしながら，これらは，二三の例を除いて，幾何学的に簡単な形状の問題に限られており，古典弾性論における応力関数や変位関数の導入によって基礎方程式系を少数の簡単な微分方程式に帰すという手法が，増分変形の力学ではまだ体系化されていない。すなわち，これまでの研究では，一様な初期応力場の二次元増分変形に対し，M.A.Biotが変位関数を導入した一例があるにすぎないのを見ても明らかであろう。

したがって，今後の増分変形の力学における課題としては，古典弾性論と同じように，二次元問題・三次元軸対称問題・動的問題・熱弾性問題・その他に対し，それぞれ適当な応力関数なり変位関数なりの導入により，解析の体系化が行なわなければならないであろう。このため，本報では，M.A.Biotの基礎理論に立脚し，

(1) 物体はいわゆるneo-Hookean solid である。

(2) 初期変形は静的で軸対称，しかも軸方向に一様である。

(3) 増分変形は軸対称である。

という条件のもとに，変位増分関数の導入により，一般的な微分方程式を導く。さらに，その方程式を二三の具体的な問題に適用し，方程式の適用性・有効性を明らかにする。

第1部　増分変形の力学の基礎式

第1章　M.A.Biotの増分変形の力学

本章では，第1節緒言につづき，第2節で，M.A.Biot の基礎理論にもとずくひずみ増分と応力増分の特性について考察を加え，第3節で，非圧縮・等方性材に対する増分に関する構成方程式をあげ，第4節で，運動方程式と境界条件について解説を行った。第5節はM.A.Biotの理論とH.Neuber およびA.E.Greenらの学派の理論の総括を行い，それぞれの理論を分析して従来，不問にされていた理論相互の相違・関連を明確にした。この結果，M.A.Biot の理論は局所回転場（ local rotation field）の導入により，増分変形による局所的な剛体回転に対応する応力の増分（幾何学的応力増分）とそれを除いた純粋の意味での変形の増分に対応する

応力の増分（物理的応力増分）との分離が可能になり，そのため，応力増分の物理的意味が明らかになること，また局所的な直交座標の使用により，応力増分とひずみ増分の関係が明確な形で得られること，等の利点があることが明らかになった。

第２章　軸対称増分変形に対する基礎式の誘導

本章では，前章の諸式から出発して，古典弾性論の伝統的な手法にならい，軸対称増分変形に対する基礎式を導き，特解の解法に資することで，この分野における解法の進展を図ることを目的とした。

すなわち，第１節緒言につづき，第２節では，軸対称の初期変形・初期応力の一般解を求め，第３節では，増分変形に関する諸式を円筒座標で表記し，第４節で，序論で述べた三条件の下に，非圧縮性の条件を恒等的に満足する新しい変位増分関数$\phi(r, z, t)$を導入し，この$\phi(r, z, t)$を用いて，ひずみ増分，応力増分を表示し，次のような$\phi(r, z, t)$の満足すべき微分方程式および境界に働く力の増分の式を求めた。

$$\begin{aligned}
&\left[\nabla^4\phi + (\lambda^3-1)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\nabla^2\phi - \lambda\frac{\rho}{\mu_0}\nabla^2\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right] \\
&+\int^r\left(\frac{K}{r^2}\right)\left[3\frac{\partial}{\partial r}\nabla^4\phi - 4\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2\phi\right) + (2\lambda^3-3)\frac{\partial^3}{\partial r\partial z^2}\nabla^2\phi\right. \\
&\qquad\left. +\frac{2}{r}\frac{\partial^4\phi}{\partial r^2\partial z^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial^3\phi}{\partial r\partial z} - 2\lambda\frac{\rho}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right]dr \\
&+\int^r\left(\frac{K}{r^2}\right)^2\left[3\frac{\partial}{\partial r}\nabla^4\phi - 8\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2\phi\right) + (\lambda^3-3)\frac{\partial^3}{\partial r\partial z^2}\nabla^2\phi\right. \\
&\qquad\left. +\frac{4}{r}\frac{\partial^4\phi}{\partial r^2\partial z^2} - \frac{10}{r^2}\frac{\partial^3\phi}{\partial r\partial z^2} - \lambda\frac{\rho}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right]dr \\
&+\int^r\left(\frac{K}{r^2}\right)^3\left[\frac{\partial}{\partial r}\nabla^4\phi - 4\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2\phi\right) - \frac{\partial^3}{\partial r\partial z^2}\nabla^2\phi + \frac{2}{r}\frac{\partial^4\phi}{\partial r^2\partial z^2} - \frac{6}{r^2}\frac{\partial^3\phi}{\partial r\partial z^2}\right]dr = 0 \qquad (1)
\end{aligned}$$

$$\left\{\begin{aligned}
\triangle f_r &= S - \mu_0\left(\frac{Q^2}{\lambda^2}\frac{\partial^3\phi}{\partial r^2\partial z} - \frac{1}{Q^2}\frac{1}{r}\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial z}\right) \\
\triangle f_z &= \frac{\mu_0}{4}\left(\frac{3Q^2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda}\log Q^2 - \frac{2C}{\mu_0}\right)\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) - \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right\}
\end{aligned}\right. \quad : r = 一定 \qquad (2)$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
\Delta f_z &= S+\frac{1}{2}\mu_0\left(2\lambda^2+\frac{3Q^2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda}\log Q^2-\frac{2C}{\mu_0}\right)\frac{\partial^3\phi}{\partial r^2\partial z} \\
&\quad +\frac{1}{2}\mu_0\left(2\lambda^2+\frac{Q^2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda}\log Q^2+\frac{2}{Q^2}-\frac{2C}{\mu_0}\right)\frac{1}{r}\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial z} \qquad : z=\text{一定} \\
\Delta f_r &= \frac{1}{2}\mu_0\left(\frac{Q^2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda}\log Q^2-\frac{2C}{\mu_0}\right)\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)\right\}-\mu_0\lambda^2\frac{\partial^3\phi}{\partial r\partial z^2}
\end{aligned}
\right.
\tag{3}
$$

ただし

$$
\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{4}
$$

$$
Q^2=\lambda\left(1+\frac{K}{r^2}\right) \tag{5}
$$

上式で，λ および K は初期変形の度合いを表わす定数である。

さらに，第 5 節では，初期変形・初期応力の一様な特別な場合を取りあげ，R. Hill の安定性に関する汎関数から基礎式を誘導し，本章の一般的な基礎式から得られるものと一致することを確かめた。

第 2 部　基礎式の適用例

第 3 章　厚肉円筒殻の軸圧縮座屈

増分変形の力学基礎理論が，一般的な弾性安定論に関連して始まり，発展してきたことにかんがみ，本章では，第 1 部で誘導した軸対称増分変形の力学の基礎式の簡単な適用例として，まず，厚肉円筒殻の軸圧縮による軸対称座屈の問題を取扱った。

本章での厚肉円筒殻の軸圧縮による軸対称座屈の問題は，E. W. Wilkes によるものと同じであるが，その立脚する基礎理論が異なるため，異なる結果が得られた。すなわち，増分応力の定義の違い，換言すれば，高次項の省略に相違があるため，結果にも相違が生ずるものと考えられる。また，本報の解法についてみれば，変位増分関数の導入により，問題の解析がはるかに簡潔にまとめ得ていることを付言する。

なお結果に関しては，本解は殻の厚さが他の寸法に比して小さいという前提を設けない一般的な理論であるから，(a/ho)が小さい時，すなわち，円筒の平均半径に比して殻厚が小さくない時，または (ma/

Lo)が大きい時，すなわち，円筒の長さに比して平均半径が非常に大きい時，のいずれの場合も，正確な座屈荷重を与える。古典解は，（a／ho ）＝20では，本解とよく一致しているが，（a／ho ）＝10，5，3となるにつれて，一致する（ma／Lo ）の範囲はせまくなっている。すなわち，古典理論はせいぜい殻厚が平均半径の20分の1程度までの薄い殻について正確な解を与えるだけであることが分った。また，本解により（a／ho）を一定にして，（ma／Lo）を大きくしてゆくと，座屈荷重は半無限体の表面座屈の座屈荷重Pcr＝2.05μ_0に漸近することを確かめた。

第4章　全周圧縮をうける無限体中の円形亀裂

本章では，第1部で誘導した軸対称増分変形の力学の基礎式の第二の適用例として，全周圧縮をうけて有限変形状態にあるneo－Hookean solidの無限体中にある円形亀裂が内圧をうける問題を取扱った。無ひずみ・無応力状態で等方性であった弾性体も，有限変形をうけると，増分変形に対しては異方性を示す。なぜなら，増分変形に対する構成方程式の係数が有限変形に依存しているからである。このような異方性を" incremental anisotropy "と呼ぶ。

本章では，円圧をうける円形亀裂の近傍の応力分布および応力拡大係数に対し，この" incremental anisotropy "がどのように影響するかを，Hankel交換による解析より，明らかにした。すなわち，P/μ_0が大きい程，換言すれば，" incremental anisotropy "の度合が強い程，亀裂近傍・亀裂先端近傍の応力は高くなること，また，応力拡大係数についてもP/μ_0 の正負にかかわらず，古典解の結果よりわずかながら大きくなることを明らかにした。

第5章　全周引張りをうける無限体中の円筒状空か表面を伝わる調和波

増分変形の力学における動的問題の解析は，従来まで

(1) 初期変形をうける球または円柱の振動

(2) 一様な初期変形をうける無限体中の平面調和波または加速度波の伝播

に集中しており，一様初期応力あるいは簡単な線形勾配をもつ初期応力の場の，しかも二次元的な問題の取扱いに限定されている。

本章では，軸対称の三次元的な応力波について，かつ，初期応力が一様でない場合の問題を取扱った。すなわち，無限に長い円筒状空かを有するneo－Hookean solidの無限体が，円筒状空かの軸に垂直な面内で無限遠において全周引張Tをうけ，有限変形の状態にある。この状態で半径がr_0である空かの表面を，微小振巾の軸対称の調和波がその軸方向に伝播するものとする。空かの近傍では，全周引張りTにより，応力およびひずみが集中しており，空か表面を伝わる調和波はその影響を強くうけよう。この影響がいかなるものであるかを，本章では明らかにしようとした。

解析は，最終的には，方程式(1)を境界条件

$$\Delta f_r=\Delta f_z=0 \qquad : r=r_0 \qquad (6)$$

の下に解くことであるが，ここではGalerkin 法を採用して，近似的に解析した。

その結果，円筒状空か表面を伝わる調和波は次のような影響をうけることが分った。すなわち，表面波の位相速度は，全周圧縮により小さくなり，全周引張りにより反対に大きくなること。これは，例えば，全周引張りのときには，円筒状空かまわりに強い接線応力（hoop stress）が生じ，これが軸対称表面波に対する材料の剛性を増すような効果を生ずるものと解すれば，この位相速度の増大する現象は容易に納得されよう。全周圧縮のときは，その反対と考えてよい。

結　　言

増分変形の力学において，古典弾性論の伝統的な手法にならい，変位増分関数$\phi(r, z, t)$を導入することによって，neo-Hookean solidに対する軸対称増分変形の力学の基礎本程式を簡単な体系で確立し，特解の解析に資することで，この分野における解法の進展を図った。そして固体の力学における代表的な問題の三例に適用することによって，本報で確立した基礎方程式系の有効性を具体的に実証し，この分野における各種問題に対する解法の適用性を確認した。

終りにのぞみ，終始懇切な御指導，御鞭撻を賜りました指導教官東北大学工学部渥美　光教授に深甚の謝意を表します。

審 査 結 果 の 要 旨

近代工業の進展に伴い，広義の弾性体および非弾性体を材料とする機械部品，構造物要素の厳密な設計には，部品や要素が初期に有限変形を受け，さらにある増分変形を受ける場合の力学的挙動特性を考慮する必要が増大している。この増分変形の力学は，古典理論の限定条件を除いた弾性安定問題の研究に始まり，有限変形の理論とともに進展して，座屈や波の伝播の具体的現象を解析するまでになっている。しかしこの反面，従来の理論の間には展開，定義，結果に相違が見られ，またこの点に関する統一的見解もなく，その上基礎式に対する一般解法が見当らない。このため具体的解析は幾何学的形状，初期変形状態の簡単な問題の特殊な解に限られているのが現状である。著者はこの点に着目して，諸家の理論の分析，三次元軸対称増分変形の力学に対する基礎式の誘導，さらに新解法の提唱と具体的問題に対する適用を行なった。

本論文はこれらの成果をまとめたもので，序論，2部5章と結言とからなる。

第1章では従来の諸理論の分析から出発して，理論間の相違点と関連性を明らかにし，特にM.A.Biotの理論が局所回転直交座標によるため，応力増分の物理的意味を明らかにすることができ，同時に非弾性体一般にも適用できる所以を述べている。適切にして重要な見解である。

第2章ではこの理論を基にゴム状弾性体を対象に，三次元軸対称増分変形力学の運動方程式，構成方程式，境界条件式を導き，さらに一般解法を提唱して変位増分関数解法と名付けた。これは古典弾性論のLoveの応力関数の解法と対応するものである。また著者はR.Hill の汎関数より基礎式を導き，本解法の基礎式との一致を確かめている。古典弾性論の開花がAiryを始めとする各種の関数解法に負うとすれば，著者の解法が増分変形力学の研究の進展に寄与するところは真に大きい。

著者は以上の第1部の解法を第2部において二，三の興味ある問題に適用し，解法の有用性を確かめ，さらに従来の解あるいは古典解と対比して，増分変形力学の意義を具象的に明らかにした。
すなわち

第3章では厚肉円筒殻の座屈問題を解析し，E.W.Wilkesよりはるかに簡潔な解を得ていることを示し，さらに極限の場合を求めて半無限体表面座屈の現象に漸近することを明らかにしている。

第4章では全周圧縮を受ける無限体中の円形亀裂附近の応力分布と応力拡大係数とを求めている。例の少ない混合境界値問題に対する興味ある適用で，有限変形による異方性の影響を，古典解と比較して明らかにしている。実際的にも重要である。

第5章では全周引張りを受ける無限体中の円筒状空か表面を伝わる調和波に及ぼす初期応力の影響を明らかにしている。従来の研究に見られない不均一初期応力場の波の位相速度の特性を，初期応力との関連において明らかにした重要な研究である。

以上要するに本論文は，ゴム状弾性体の軸対称増分変形の力学の理論解の体系を確立し，弾性学の進展に貢献する成果を挙げており，機械工学上寄与するところが少なくない。

よって，本論文は工学博士の学位論文として合格と認める。