氏　名(本籍)	原　尾　政　輝　(熊本県)
学位の種類	工　学　博　士
学位記番号	工　博　第３３３号
学位授与年月日	昭和４７年３月２４日
学位授与の要件	学位規則第５条第１項該当
研究科専門課程	東北大学大学院工学研究科 (博士課程)電気及通信工学専攻
学位論文題目	**反復論理回路に関する基礎的研究**
論文審査委員	(主査) 教授　大泉　充郎　教授　本多　波雄 教授　野口　正一

論　文　内　容　要　旨

セルとよばれる基本回路を一定の規則性に基いて配列構成した回路網の総称を反復論理回路とよぶ。反復論理回路網は大別するとセルが組合せ的な場合と順序回路の場合とがある。本論文では前者をセルラーロジック，後者をセルラーオートマン又は反復オートマンとよび前半部でセルラーロジックを後半部でセルラーオートマトンを論じている。まず前半部について考えてみると大規模な情報処理機器の小型化，高信頼度化を目的として回路網の集積化が進められているが，論理回路の集積回路での実現に適した合成法が重要になった。その理論的研究としてセルラーロジックが採り挙げられ，１９６５年項のＭａｉｔｒａに始まり種々の方向から考察されてきた。特にカスケードでの合成については理論的取り扱かいが比較的簡単な事から多くの研究があるが，Ｙｏｅｌｉ，鈴木，Ｅｌｓｐａｓ等は従来の古典的ブール関数の分解理論から脱脚して群論的手法を用いて議論している。この群とその作用素の概念は多値論理関数の構造とも関連してゆく。本論

文ではこの点に着目し，多値論理関数をカスケードで合成する問題を統一的に論じる。後半部のセルラーオートマトンについては並列演算機能を持つ計算機の数学的モデルであるとか，生物系の脳等の神経回路網の数学のモデルであるとか種々の捕え方はあるが，理論的にはセル空間の結線と機能との関係を記述することが重要な一つの問題である。Yamda & Amoyoso は一般 d 次元セル空間でのセルラーオートマトンの構造，機能を定式化する一手法についてのべているが，本論文ではこの流れに沿って，新しく群グラフの概念を用いて構造と機能の関係を調べることを目的としている。

第1章　多値論理関数

ここでは一般多値論理の性質を考察するのではなく，反復論理回路網での合成に適した多値論理関数の基本演算を定義し，その系のもつ性質を述べたものである。この問題の着想はブール関数の環和表現は演算が線形であり，環論的にその性質を統一的に論じることが出来るが，それを多値まで拡張すればどうなるかということであった。この考え方に基いて p^m 個の真理値をもつ多値論理関数の定義と性質について述べている。まず論理演算として $GF(p^m)$ の加法と乗法を用いればこの論理系は完備であることを示し，それに付随した関数の一般展開形，多元環表現及び最小項関数表現を導入した。ここで多元環表現及び最小項関数表現はブール関数の環和表現と最小項表現の一般化である。その他第2章以下で論じる多値論理関数のカスケード合成に必要な諸性質について言及している。

第2章　回路網の代数表現

この章では p^m −値論理関数の多出力回路を合成するために必要な回路網の表現を代数的立場から議論している。図1に示されるような多値論理関数の多出力回路は，接続端子に群の元Gを

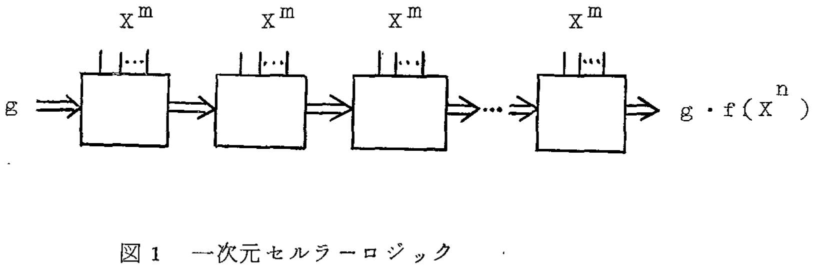


図1　一次元セルラーロジック

割り当てると入力変数のn−組 X^nからGへの写像$f : X^n \to G$として表現される。これを群関数とよぶが，この群関数の性質を求めることがこの章での目的である。群Gとしては種々のとり方があるが特に巡回群と基本可換群をとった場合について詳細にのべている。その時群関数$f : X^m \to G$の多元環表現や最少項関数表現を示し，p^m−値論理関数との類似点等について述べている。

第3章　多段論理回路網による多値論理関数の合成

この章では実際に多値論関数をカスケードで合成する考え方とアルゴリズムを与える。まず前章で定義した多元環表現と回路網との対応を考えることにより，群Gの作用素を機能としてもつ作用素セルが自由入力1本のセルのカスケードで合成する場合には必要であることを示し，基本可換群，巡回群を機能としてもつセルとその作用素セルを用いた場合の具体的アルゴリズムを与えた。それは次のようである。

(1)　与えられた合成すべきn−変数関数のk−組を群関数で表わし多元環表現する。

(2)　作用素セルを定め，その作用素セルによって定まる多元環表現の変形（標準方程式）を求める。

(3)　標準方程式から（n−1）−変数関数を求める。

(4)　前の操作で求まった各（n−1）−変数関数を同様にして（n−2）−変数関数に分解する。

(5)　全成分が1変数になった時このアルゴリズムは終了する。

このアルゴリズムの一段階は図2のような回路分解に対応している。従って作用素セルが存在

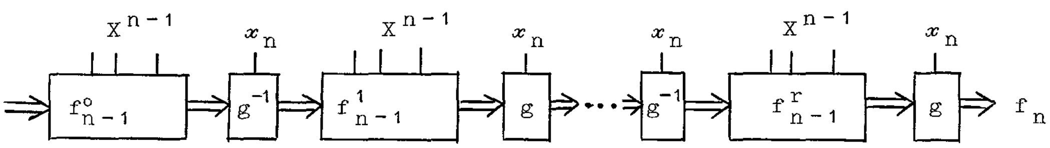


図2　反復合成アルゴリズムと回路網

すれば，この手法で自由入力変数1本のセルのカスケードで実現できることになる。このことを証明することによって次の結果を得た。

定理　任意のP^m一値，k−出力回路網は$p=2$，$m=k=1$の場合を除いて高々$km+2(p^m-1)$種のセルを用いて所要セル数$L_n \leqq Rm(p^{mn+m}-p^{mn})+2\cdot p^{m(n-1)}-2$で合成可能である。

定理　p値k出力回網は$P=2$の場合を除いてp種の1入力セルを用いて常に合成可能で所要セル数は

$$L_n \leqq (p^{k+1} - p + 2) \cdot p^{n-1} - 2$$

定理　2値，k出力回路網は（2^k+1）状態セルを用いれば，2種のセルで$L_n \leqq 2^{k+n} + 2^n - 2$で実現可能。

次に以上の構成法では数種のセルを用いたが，これらが一種のセルで置き換えれるかという事を議論し，次の結果を得た。

定理　2値，3値セルは唯一種のセルで置き換えることができ，反復回路で実現できる。しかし一般多値の場合は未解決である。

第4章　反復合成法の応用とセルラーロジックの概要

この章ではセルの機能を適宜切り換えるカットポイントを持った2次元回路網の考えと，それを3章の手法に応用した2，3の例や順序回路の合成法等について簡単に述べている。

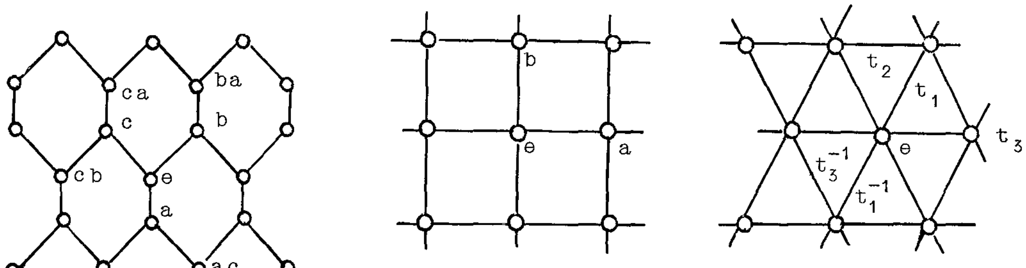
第5章　反復オートマトン

ここでは反復オートマトンの構造や機能を代数的に定式化し，一般的性質を求めている。まず機能を無視し各セルを頂点に結線を辺に対応させ，配列をグラフ表現する。特に頂点を群Gに対応させ，HをGの部分集合とするとき，群グラフG_Hを次のように定義する。即わち，(g_i，g_j)が辺であるためには$g_i^{-1} g_j \in H$であるとする。

以下配線が群グラフで定議されているとし，それらの反復オートマトンの能力をグラフ的な意味で埋蔵可能か否かという意味として捕えオートマトン間の能力の比較を行なっている。これについては次の結果を得る。

定理　群G_1を頂点集合とするグラフが，G_2を頂点集合とする連結なグラフを実現できるための必要十分条件はG_1がG_2を部分群として含むことである。

例えば図3に示される2次元配列では6角形⊃4角形⊃4角形なる関係がある。



(a)　6角形　(b)　4角形　(c)　3角形

図3　2次元平面群グラフ

セルが直接接続されているセルを近傍セルとよぶことにすれば，セルの状態は近傍セルの関数として表わせる。これを局所関数とよぶ。全体のオートマトンとしての機能，即ち全域関数は局所関数によって決定される。さてセルの状態数が p^m であると仮定すれば，第1章の多値論理関数の性質を用いて全域関数が行列表現され，更にその行列が状態遷移行列と1対1に対応することを証明している。又グラフ上での自己同型写像とオートマトン上での自己同型写像との関係より次の結果を証明した。

定理　ある群Gを頂点集合とするセルラーオートマトンとして，あるオートマトンが実現できるための必要十分条件はGの左（右）移動作用素と遷移関数が可換なることである。

この基本定理よりある群Gを頂点集合とするグラフで実現できるセルラーオートマトンが規定でき，それらが半群をなすことを証明した。最後にこの半群上に種々の関係を定義し，それに基いた分類とその各類のもつ半群論的性質を考察した。

第6章　一次元巡回構造オートマトン

前章での一般概念を一次元巡回構造をもつセルラーオートマトンに適用し，動特性，特に最大周期実現問題等について述べている。例えば最大周期については，

定理　セルの状態数q，セルの個数nの回路では $q^n - q$ が最大周期で，nが素数の時はこのサイクルを実現できるが，素数以外では実現不可能である。

その他局所関数と遷移関数を与え，$q = 2$，近傍3の場合相似でない遷移関数を生成する局所関数の代表元が88－種である事等を証明した。

第7章は結論であり以下附録，謝辞，文献という構成になっている。

審査結果の要旨

近年における情報処理工学の急速な発達により，大規模情報処理装置の開発と高度な処理方式の開発は不可欠の課題となった。中でも前者に対してはL.S.Iに代表される超高密度空間回路の設計理論，後者に対しては空間情報処理方式の研究がその中心的問題であるが，これらの研究の基礎をなすものがCellular Logicである。本研究はこの観点から，反復論理回路網によって構成されるCellular Logicの一般的性質を数学的立場から研究し，組合せ的回路網の設計理論及び，順序回路網の合成理論を与えたものであり，序文と7つの章より成る。

第1章では論理回路を反復構成することを目的として以下の研究の基礎をなす$GF(p^m)$の演算で定義されるp^m値多値論理関数を定義し，この論理関数系のもつ代数的性質を調べている。

第2章では多値論理関数を実現することを目的とした多段論理回路網の表現について考察している。

本章の基本的な考え方は回路網が状態間の遷移を与える写像であると見做すものであり，この立場より群論，半群論的な手法が自然に導入できる。変換を可換群とした場合について，多くの興味ある結果が導かれ，特に群による回路網の代数的表現の問題は本質的に多値論理関数の考え方と同一であることを導いた。

第3章ではまず与えられた任意の多値論理関数を実現する回路網の多元環表示と，回路網構成との対応を与え，つぎに，変換に巡回群または基本可換群セルをもちいた場合，任意の多値関数をセルに対し一個の入力変数のもとで合成する一般的なアルゴリズムを導いた。この場合k出力回路網を構成するための基本セルの種類，および必要なセルの総数の上限を与え，さらに2値および3値セルの場合には，ただ一種類のセルのみで任意の論理回路が合成できることを示した。本章での研究は多値論理回路設計のための基礎的理論を確立したものであり，極めて重要な知見である。

第4章は反復論理回路を工学的に具体化する問題について論じたものであ。

第5章では，セルを有限状態オートマトンとしたとき，回路網がもつ一般的性質を群グラフの概念を導入して明らかにし，特にオートマトンの実現能力とグラフ上の関係を与えている。また回路網の局所関数と全域関数との関係が統一的に論ぜられ，特に与えられたオートマトンが反復オートマトンとして実現できるための必要十分条件が与えられた。これらの結果は極めて興味ある結果である。

第6章は第5章での一般的な結果を具体的な一次元巡回構造をもつ反復オートマトンに適用し，動特性，特に最大周期実現問題等について論じたものである。

第7章は結論である。

以上要するに本論文はCellular Logic に対する一般的性質を明らかにし特に反復論理回路網による任意の多値論理関数設計のための基礎理論を確立し，さらに反復論理回路網のもつ一般的性質を明らかにしたものであり，情報工学に寄与するところ少なくない。

よって，本論文は工学博士の学位論文として合格と認める。