氏　名（本籍）	斎藤制海（さいとう おさみ）（愛知県）
学位の種類	工学博士
学位記番号	工博第379号
学位授与年月日	昭和48年3月27日
学位授与の要件	学位規則第5条第1項該当
研究科専門課程	東北大学大学院工学研究科 （博士課程）電気及通信工学専攻
学位論文題目	最適推定と最適制御における感度解析に関する研究
論文審査委員	（主査） 教授 本多 波雄　教授 大泉 充郎 教授 木村 正行　助教授 竹田 宏

論文内容要旨

第1章　緒　　言

最適制御理論では制御対象の数式モデルに対して最適解を求めることにその重点が置かれているが，実際の制御対象とその数式モデルのパラメータの間にある程度の誤差はさけられない。したがって最適制御理論をより実際的な意味で役立ものにするためには，それらのパラメータ誤差が最適な状態をどの程度劣化させるか，またその値は工学的に要求される許容範囲に入っているかを検討する必要がある。

本研究は最近の最適制御問題において特に体系的理論をもちかつ実際面にも多くの応用例をみる最適推定および最適レギュレータ問題をとりあげ，パラメータの誤認が評価関数の値にいかなる影響を与えるかを解析し，最適状態の劣化の度合を評価することを目的とする。

第２章　白色雑音に対する最適フィルタの感度解析

白色雑音に対する最適フィルタを設計するには周知のように通報系の初期状態，外乱，観測雑音の統計的性質および通報系の動特性，観測機構を正確に知る必要がある。本章ではこれら諸量を誤認したときのフィルタの評価関数への影響を解析する。

実際の通報系および雑音の統計的性質は

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ z(t) &= C(t)x(t) + v(t) \end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

$$\left.\begin{aligned} E\{u(t)\} &= E\{v(t)\} = 0 \\ E\{u(t)u'(\tau)\} &= Q(t)\delta(t-\tau) \\ E\{v(t)v'(\tau)\} &= R(t)\delta(t-\tau) \end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

であるのに対し，数式モデルはパラメータ同定誤差などにより，

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_m(t) &= A_m(t)x_m(t) + B_m(t)u_m(t) \\ z_m(t) &= C_m(t)x_m(t) + u_m(t) \end{aligned}\right\} \qquad (2.3)$$

$$\left.\begin{aligned} E\{u_m(t)\} &= E\{v_m(t)\} = 0 \\ E\{u_m(t)u_m'(\tau)\} &= Q_m(t)\delta(t-\tau) \\ E\{v_m(t)v_m'(\tau)\} &= R_m(t)\delta(t-\tau) \end{aligned}\right\} \qquad (2.4)$$

で与えられたとする。この誤った数式モデルをもとに設計したフィルタを実際の通報系の状態変数の推定に用いると推定値$\hat{x}_a(t)$は

$$\dot{\hat{x}}_a(t) = A_m(t)\hat{x}_a(t) + K_m(t)\left[z(t) - C_m(t)\hat{x}_a(t)\right] \qquad (2.5)$$

ここで

$$K_m(t) \triangleq P_m(t)C_m'(t)R_m^{-1}(t)$$

$$\dot{P}_m(t) = A_m(t)P_m(t) + P_m(t)A_m'(t) - P_m(t)C_m'(t)R_m^{-1}(t)C_m(t)P_m(t) + B_m(t)Q_m(t)B_m'(t) \qquad (2.6)$$

となる。（2.5）式で与えられるフィルタはもはや最適推定値を与えるものでなく以後準最適フィルタと呼ぶ。

この準最適フィルタの推定誤差分散行列

$$P_a(t) \triangleq E\left[(x(t)-\hat{x}_a(t))(x(t)-\hat{x}_a(t))'\right] = E\left[\tilde{x}_a(t)\tilde{x}_a'(t)\right] \qquad (2.7)$$

は従来state augmentationを用いて評価されてきたが，外乱$u(t)$から推定誤差$\tilde{x}_a(t)$までのインパルス応答行列を導入することにより，次の三つの線形微分方程式

$$\dot{P}_a(t) = F_m(t)P_a(t) + P_a(t)F_m'(t) + \left[F(t)-F_m(t)\right]\left[S_1(t)-S_2(t)\right] + \left[S_1(t) - S_2(t)\right]'\left[F(t)-F_m(t)\right]' + B(t)Q(t)B'(t) + K_m(t)R(t)K_m'(t) \qquad (2.8)$$

$$\dot{S}_1(t) = A(t)S_1(t) + S_1(t)A'(t) + B(t)Q(t)B'(t) \qquad (2.9)$$

$$\dot{S}_2(t) = A(t)S_2(t) + S_2(t)F_m'(t) + S_1(t)C'(t)K_m'(t) \qquad (2.10)$$

但し，$F(t) \triangleq A(t)-Km(t)C(t)$，$Fm(t) \triangleq Am(t)-Km(t)Cm(t)$

を逐次解いて求めることができる。

ついでパラメータ誤認の評価関数への影響をはかる尺度として最適評価関数感度，絶対評価関数感度，相対評価関数感度を定義し，各々に対し感度係数および感度方程式を導く。その結果微小なパラメータの誤認は評価関数への値にはほとんど影響せず最適状態の劣化は無視できることが示される。

第3章　最適レギュレータ問題における感度解析

最適レギュレータの最適操作量を決定するには制御対象

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}(t^*)&=A'(t^*)x(t^*)+C'(t^*)y(t^*)\\ u(t^*)&=B'(t^*)x(t^*)\end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

および評価関数

$$J=\frac{1}{2}\left[\int_0^t\left\{u'(t^*)Q(t^*)u(t^*)+y'(t^*)R(t^*)y(t^*)\right\}dt^*+x'(T)\Sigma x(T)\right] \qquad (3.2)$$

を完全に把握しておく必要があるが，それらの数式モデルが

$$\begin{aligned}\dot{x}m(t^*)&=A'm(t^*)xm(t^*)+C'm(t^*)ym(t^*)\\ um(t^*)&=B'm(t^*)xm(t^*)\end{aligned} \qquad (3.3)$$

$$J=\frac{1}{2}\left[\int_0^t\left\{u'm(t^*)Qm(t^*)um(t^*)+y'm(t^*)Rm(t^*)ym(t^*)\right\}dt^*+x'm(T)\Sigma xm(T)\right] \qquad (3.4)$$

で与えられたとする。本章ではこのような実際の制御対象とその数式モデルのパラメータ誤差が最適レギュレータの評価関数にいかなる影響を及ぼすかを解析する。

従来最適レギュレータは閉回路構成で考えられていたが，ここでは開回路構成の場合もあわせて考察する。

〔a〕 閉回路構成の場合

数式モデルをもとに設計される閉回路最適操作量は

$$y(t^*)=-K'm(t^*)x(t^*) \qquad (3.5)$$

$$Km(t^*)\triangleq Pm(t^*)C'm(t^*)R^{-1}m(t^*)$$

$$-\dot{P}m(t^*)=Am(t^*)Pm(t^*)+Pm(t^*)A'm(t^*)-Pm(t^*)C'm(t^*)R^{-1}m(t^*)Cm(t^*)Pm(t^*)$$
$$+Bm(t^*)Qm(t^*)B'm(t^*) \qquad (3.6)$$

である。これを実際の制御対象に用いたときの閉回路準最適レギュレータの評価関数の値は初期値 xo，の二次形式

$$J^c=\frac{1}{2}\langle xo,Pa^c(0,T)xo\rangle \qquad (3.7)$$

で与えられる。この二次形式の重み行列 $Pa^c(0,T)$ は

$$-\dot{P}a^c(t^*)=[A(t^*)-Km(t^*)C(t^*)]Pa^c(t^*)+Pa^c(t^*)[A(t^*)-Km(t^*)Cm(t^*)]'$$

$$+ B(t)Q(t)B'(t) + Km(t)R(t)Km'(t) \tag{3.8}$$

なる線形微分方程式の解として求めることができる。

〔b〕 開回路構成の場合

数式モデルをもとに設計される開回路最適操作量は

$$y^{*}(t) = -Km'(t)zm(t) \tag{3.9}$$

である。ここで $zm(t)$ は関数発生器

$$\dot{z}m(t) = [A'm(t) - C'm(t)K'm(t)]\ zm(t) \tag{3.10}$$

の状態変数である。これを実際の制御対象に用いたときの開回路準最適レギュレータの評価関数の値は(a)と同様

$$J^{0} = {}^{1}\!/_{2} < x_{0}\ ,\ P_a^{0}(O, T)x_{0} > \tag{3.11}$$

で与えられ，$P_a^{0}(O, T)$ は2章の解析手法がそのまま適用でき，

$$-\dot{P}a^{0}(t) = Fm(t)Pa^{0}(t) + Pa^{0}(t)Fm'(t) + [F(t) - Fm(t)][S_1(t) - S_2(t)]$$

$$+ [S_1(t) - S_2(t)]'[F(t) - Fm(t)]' + B(t)Q(t)B'(t) + Km(t)R(t)Km'(t) \tag{3.12}$$

$$-\dot{S}_1(t) = A(t)S_1(t) + S_1(t)A'(t) + B(t)Q(t)B'(t) \tag{3.13}$$

$$-\dot{S}_2(t) = A(t)S_2(t) + S_2(t)F'm(t) + S_1(t)C'(t)Km'(t) \tag{3.14}$$

但し　$F(t) \triangleq A(t) - Km(t)C(t)$，$Fm(t) \triangleq Am(t) - Km(t)Cm(t)$

なる三つの線形微分方程式を解くことにより得られる。

ついで〔a〕，〔b〕の各々の場合において2章の定義に従い三つの評価関数感度，それらの感度係数および感度方程式を導く。

第4章　感度解析からみた最適フィルタと最適レギュレータの双対性

2章の白色雑音に対する最適フィルタと3章の最適レギュレータには双対の関係があることがすでにKalmanらによって指摘されている。本章はこの両者の双対関係を感度解析の立場から考察したものである。

まず，最適レギュレータを開回路構成とみなすことにより，閉回路構成では明らかでなかった両者の構造上の双対関係が明らかになる。ついで最適フィルタと開回路最適レギュレータの双対関係はパラメータ誤認のため両者が準最適になっても保存され，表Ⅰに示すような対応関係が存在する。この結果最適フィルタと最適レギュレータの感度は一方の問題の結果が得られればそれはそのまま他方の問題に適用出来ることが明らかになる。

準最適フィルタ	開回路準最適レギュレータ
実際の通報系	実際の制御対象
準最適フィルタ	準最適関数発生器
準最適フィルタの推定誤差	準最適レギュレータの評価関
分散行列　Pa(t)	数の重み行列　$\overset{0}{Pa}(t)$
準最適ゲインKm(t)	準最適ゲインKm(t)
感度係数と感度方程式	感度係数と感度方程式

Table 1. Correspondence between the sub-optimal filter and the open loop sub-optimal regulator.

第5章　有色雑音に対する最適フイルタの感度解析

有色雑音に対する最適フイルタを設計するには雑音の統計的性質つまり相関々数を正確に知る必要がある。

本章はこの相関々数の誤認の影響を1）有色雑音のモデルであるシュピングフィルタのパラメータを誤認した場合2）有色雑音を白色雑音と誤認した場合の二つの場合に分けて解析する。

(a)シュピングフィルタのパラメータを誤認した場合。

通報系が（2.1）式で与えられ〔但しここではC(t)は定数行列とする〕，実際の有色雑音のシュピングフィルタは

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= G(t)v(t)+w(t) \\ E\,[w(t)w'(\tau)] &= R(t)\delta(t-\tau) \\ E\,[v(0)v'(0)] &= \Lambda \end{aligned} \quad (5.1)$$

であるのに，そのモデルは

$$\begin{aligned} \dot{v}m(t) &= Gm(t)vm(t)+wm(t) \\ E\,[wm(t)wm'(\tau)] &= Rm(t)\delta(t-\tau) \\ E\,[vm(0)vm'(0)] &= \Lambda m \end{aligned} \quad (5.2)$$

と誤認したとする。このときの準最適フィルタは

$$\dot{\hat{x}}a(t) = A(t)\hat{x}a(t)+Km(t)\,[\dot{z}(t)-Gm(t)z(t)-Hm(t)\hat{x}a(t)] \quad (5.3)$$

$$Hm(t) \triangleq C\,A(t)-Gm(t)C$$

$$Sm(t) \triangleq C\,B(t)Q(t)B'(t)C'+Rm(t)$$

$$Km(t) \triangleq [Pm(t)Hm'(t)+B(t)Q(t)B'(t)C']\,Sm^{-1}(t)$$

$$\dot{P}m(t) = A(t)Pm(t)+Pm(t)A'(t)-Km(t)Sm(t)Km'(t)+B(t)Q(\tau)B'(t) \quad (5.4)$$

となり，推定誤差分散行列 $Pa(t)$ は 2 章と同様の解析手法により

$$\dot{P}a(t)=[A(t)-Km(t)Hm(t)]\,Pa(t)+Pa(t)\,[A(t)-Km(t)Hm(t)]'$$
$$+Km(t)R(t)Km'(t)+[I-Km(t)C]\,B(t)Q(t)B'(t)\,[I-Km(t)C]'$$
$$+Km(t)\,[G(t)-Gm(t)]\,P_1(t)+P_1'(t)\,[G(t)-Gm(t)]'\,Km'(t) \qquad (5.5)$$

$$\dot{P}_1(t)=G(t)P_1(t)+P_1(t)\,[A(t)-Km(t)Hm(t)]'+R(t)Km'(t)$$
$$+P_2(t)\,[G(t)-Gm(t)]\,Km'(t) \qquad (5.6)$$

$$\dot{P}_2(t)=G(t)P_2(t)+P_2(t)G'(t)+R(t) \qquad (5.7)$$

なる三つの線形微分方程式の解として得られる。

(b)有色雑音を白色雑音と誤認した場合

有色雑音を白色雑音と誤認あるいは近似する，つまり相関々数のモデルが

$$E\,[v(t)v'(\tau)]=R^{W}(t)\delta(t-\tau)$$

なるデルタ関数であるとしたときの準最適フィルタの推定誤差分散行列 $Pa^{W}(t)$ は(a)と同様三つの線形微分方程式の解として得られる。

第 6 章　結　　言

以上本研究では最適推定および最適レギュレータ問題の感度解析を行ない，それぞれの場合の評価関数損失を求めるとともに，両者の双対性について考察してきた。今後対象とするシステムが複雑，大規模になるにつれ感度理論は単に解析だけにとどまらず制御系のモデル化，最適設計などの問題に最初から積極的にとり入れねばならない。したがって感度理論を包括するような新しい大規模制御理論の発展が望まれる。

審 査 結 果 の 要 旨

最適制御理論を中心とする自動制御理論の発展は最近めざましいものがあるが，その研究の多くは対象とするシステムの数学的モデルを完全に既知として理論を展開している。しかし近年システムが益々複雑大規模になるにつれ，その正確な数学的モデルを同定することは実際に不可能となってきた。

従って制御理論を工学的問題へ適用するためには実際のシステムとそのモデル間の誤差の制御特性におよぼす影響についての解析，すなわち感度解析は必要不可欠なものである。著者はこの見地から，現在最も重要でかつ体系的理論をもつKalmanフィルタと最適レギュレータに対する感度解析を行ないパラメータの誤認，変動と評価関数感度との関係を解明し，感度からみた両者の双対性を明らかにするとともに，有色観測雑音のモデル化を誤った場合の推定誤差分散について解析した。本論文はその研究成果をまとめたもので全編6章よりなる。

第1章では緒言で，本研究の背景と目的および本論文の概要について述べている。

第2章は白色観測雑音に対する最適フィルタ（Kalmanフィルタ）設計に必要な各種パラメータを誤認した場合の，推定誤差分散について解析したものである。著者はシステム外乱から推定誤差までのインパルス応答行列を新たに定義することにより，推定誤差分散を与える一組の線形微分方程式を導いた。その結果パラメータ誤認に基づく評価関数感度は零となることを明らかにした。本章で導入した解析手法は，従来のState Augmentationを必要とする手法に比べ簡単であり，本研究の基礎をなす重要な成果である。

第3章は最適レギュレータの感度解析について述べたものである。最適レギュレータは常に閉ループ系として考えられてきたが，本論文ではそれを制御関数発正器と制御対象の直列接続よりなる開ループ系とみなし，前章の手法をそのまま適用して二次形式評価関数を与える一組の微分方程式を導いた。本章で得た結果はその特別な場合として，従来の閉ループ最適レギュレータの感度解析の結果を包含するものである。

第4章では感度解析の面からみた最適フィルタと最適レギュレータの双対性について考察している。すなわち，最適レギュレータを開ループ系とみなすことより，両者の構造上の双対性が明確になることおよびパラメータ誤認のため両者が準最適になっても，双対性が保存されることを明らかにした。これは自動制御理論に興味ある新知見を加えたものである。

第5章では，まず有色観測雑音のモデルであるシェイピングフィルタのパラメータを誤認した場合，次いで有色雑音を適当な白色雑音で近似した場合の推定誤差分散について解析し，デジタルシミュレーションによる数値例を示している。これらの結果は，実在の観測雑音のモデル化に対する一つの基準を示すもので，実用上大きな意義を有するものである。

第6章は結言である。

以上要するに，本論文は制御理論の実用化を目的として，最適推定および最適レギュレータ問題の感度解析に関する統一的理論を確立するとともに，両者の間にある双対性を明らかにしたものであって，制御工学，システム工学の発展に寄与するところが少なくない。

よって，本論文は工学博士の学位論文として合格と認める。