氏　　　　名	渋井正直（しぶい　まさなお）
授与学位	工学博士
学位授与年月日	昭和51年3月25日
学位授与の根拠法規	学位規則第5条第1項
研究科，専攻の名称	東北大学大学院工学研究科 機械工学専攻（博士課程）
学位論文題目	**非線形弾性体の変形の理論の簡易化に関する研究**
指導教官	東北大学教授　玉手　統
論文審査委員	東北大学教授　玉手　統　東北大学教授　斎藤　秀雄 東北大学教授　竹山　寿夫　東北大学教授　渥美　光 東北大学教授　八巻　昇

論文内容要旨

序論

材料の特性は多種多様であり，同一材料でも一般に変形が大きくなると周辺の力学的条件等に関連して種々の異なった特性が支配的になることがある。このような場合，物体の変形挙動の解明には連続体の三次元有限変形理論の適用を要するが，これを構成する基礎式は著しく複雑な形式を有するためにこれを与えられた問題にそのまま適用することは必ずしも適切な方法ではない。このため，変形量やエネルギ関数の形と問題の特殊性との関係を系統的に考察して三次元理論を簡易化することが望まれる。

この種の研究の一環として，板が十分厚い（あるいは横荷重を受ける角柱が十分長い）場合の弾性体の変形に関する簡易化理論が報告されている。しかし，従来のこの種の理論は，変形量の

大きさと無関係に問題の特殊性のみが考慮されて構成されており，さらに三次元理論からの直接の近似ではないために，何らかの（たとえばL_2 ノルムの）意味で必ずしも三次元理論に"近い"理論になっているとはいえない。このため，従来の簡易化理論には①拘束が過剰である，②重要な項が無視されている，③材料の様々な特性（たとえば圧縮性，異方性）が系統的に考慮されていない，④適用範囲が明確でない等の欠点が残されている。

このような簡易化理論の現状に鑑み，本報告は様々な材料特性（圧縮性を含む物性的非線形性，異方性等），幾何学的非線形性を系統的に考慮して非線形弾性体の変形の理論をオーダ評価の手法を用いて直接簡易化し，非線形平面ひずみ問題，及び非線形捩り変形問題の基礎式を応力関数空間において構成するものである。ただし，取扱いを簡単にするため面内等方性なる異方性体だけを対象とし，また，物体は必要なだけ滑らかな変形を受けるものとする。

このようにして得られる基礎式には非線形材料定数（高次の材料定数）が含まれるが，これら材料定数は単軸引張試験，二軸引張試験，せん断試験による一組の材料試験結果によって決定されるものである。本報告では，さらにこの一組の実験結果がない場合を考慮して，非線形材料定数の近似値を少数の材料試験結果から推定する簡便法を提案する。

第１部　非線形平面ひずみ理論

第１章　非線形平面ひずみ理論

本章では"滑らかな弾性体モデル"に基づき，物性的非線形性（圧縮性を含む），面内等方性，幾何学的非線形性等を系統的に考慮した非線形平面ひずみ理論を応力関数空間において構成している。

先ず，"滑らかな弾性体モデル"に基づいて非線形平面ひずみ問題を定義する。この定義は変形の種類に関する規定と変形量に関する規定からなっており，異方性等の材料特性には依らない形式を有している。また，本章における非線形平面ひずみの定義は，その特殊な場合として微小変形理論における平面ひずみ，及び従来の有限平面ひずみの定義を含んでいる。

次に，非線形平面ひずみの定義に基づき，オーダ評価の手法を用いて面内等方弾性体に関する三次元有限変形理論を直接簡易化する。すなわち，物体内に誘起されるひずみの最大値を$O(\gamma)$の量とするとき，構成方程式，適合条件式等の諸関係式において$O(\gamma^2)$の量よりも大きい項を総て考慮することによって３個の応力関数を支配する連立微分方程式を誘導する。この基礎式は比較的取扱い易い形を有しているばかりでなく，面内応力成分に関する応力関数と面外応力成分を支配する応力関数とが連成している点で従来の有限平面ひずみ問題における基礎式に相違している。

さらに，基礎式を式上で大局的に考察することによって非線形平面ひずみと非線形縦せん断変形との関係を明確にし，非線形縦せん断変形に関する若干の定理を得ている。また，本章で得ら

れた基礎式の適用範囲について明らかにしている。

第 2 章　非線形平面ひずみ理論における非線形材料定数について

第 1 章で得られた基礎式には非線形材料定数（高次の材料定数）が含まれている（面内等方性の場合には 9 個，等方性の場合には 3 個定義される）。これら非線形材料定数は単軸引張試験，二軸引張試験，せん断試験による一組の材料試験結果によって決定されるものである（ただし，等方性の場合には二軸引張試験結果は必要ない）。しかし，このような一組の実験結果のない場合を考慮して，本章では少数の材料試験結果から非線形材料定数の近似値を推定する簡便法を提案する。

第 1 章で得られた基礎式に含まれる非線形材料定数は総て 3 rd order の材料定数であるから，これらは一般に 6 階の非線形物質テンソルによって表示される。この物質テンソルを 4 階の線形物質テンソル（これは広義の Hooke の法則に相当して定義される）と，2 階の対称テンソルを基にテンソル分解し，3 個の仮定を設けて単軸引張型応力〜ひずみ曲線のみから非線形物質テンソルの成分の値を決定するというのが本章の主旨である。この簡便法は余り大きくない変形領域で有効であると考えられる。

また，上記簡便法の実例として Cr－Ni 鋼の非線形材料定数の近似値を求めている。

第 3 章　非線形平面ひずみ問題に関する基礎式の適用

本章では第 1 章で得られた基礎式を基本的な問題，すなわち，(1)「一円孔を有する面内等方弾性体の非線形平面ひずみ問題」，及び(2)「円形充填物を有する面内等方弾性体の非線形平面ひずみ問題」に適用し，種々の負荷に関して摂動解を示している。

次に，第 2 章で求めた Cr－Ni 鋼の非線形材料定数の近似値を用いて若干の数値計算を行なっている。例題(1)では面内負荷と面外負荷に関連して 5 種の負荷形態を考え，これらの結果を比較して面内負荷と面外負荷の連成の程度，及び円孔縁の応力分布に及ぼす物性的，並びに幾何学的非線形性，面内等方性の影響等を系統的に考察している。例題(2)では円形充填物と母材との相互干渉（たとえば充填物内に誘起される応力の一様性，母材側の応力分布の乱れ等）に及ぼす様々な材料特性の影響について明らかにしている。

第 2 部　非線形捩り変形理論

第 4 章　非線形捩り変形理論

本章では"滑らかな弾性体モデル"に基づき，物性的非線形性（圧縮性を含む），面内等方性，幾何学的非線形性を系統的に考慮した非線形捩り変形理論を応力関数空間において構成している。

先ず，一様な断面を有する真直棒が必要なだけ滑らかな捩り変形を受ける場合に関して非線形捩り変形を定義する。変形の種類に関する規定ばかりでなく，変形量に関する明確な規定を考慮して設けられたこの定義は，特殊な場合として，微小変形理論におけるSaint − Venantの捩り変形問題，及び従来の有限捩り変形問題に関する捩り変形の定義を含んでいる。

次に，非線形捩り変形の定義に基づき，オーダ評価の手法を用いて面内等方弾性体に関する三次元有限変形理論を直接簡易化する。すなわち，棒内に誘起されるひずみの最大値をO(r)の量とするとき，構成方程式，適合条件式等の諸関係式においてO(r^3)の量よりも大きい項を総て考慮することによって5個の応力関数を支配する連立微分方程式，及び境界条件を求めている。この基礎式を適用すれば捩り変形に伴なう棒横断面内の変形の形式，従来未解決のまま残されている問題の一つであるトルクやせん断応力に及ぼす面内変形の影響，及び面内等方性の捩り変形に及ぼす効果等の解明が可能となる。

さらに，基礎式を式上で大局的に考察し，物性的，並びに幾何学的非線形性の捩り変形に及ぼす影響，従来の有限捩り変形における基礎式と本章の基礎式との比較，非線形捩り変形と非線形縦せん断変形との関係，及び本章の基礎式の適用範囲等に関して検討している。

第5章　非線形捩り変形理論における非線形材料定数について

第4章で得られた基礎式には4個の非線形材料定数(等方性の場合には3個)が含まれている。これら非線形材料定数は単軸引張試験，せん断試験等による一組の材料試験結果によって決定されるものである。本章では，この一組の材料試験結果がない場合のために，非線形弾性理論と，全ひずみ理論に立脚した弾塑性理論との類似性を利用し，単軸引張型応力〜ひずみ曲線，及び降伏応力に関する6種の実験値を用いて非線形材料定数の近似値を推定する一つの簡便法を提案する。

全ひずみ理論に立脚した弾塑性理論における全仕事は変形径路に依らない。この点に関する限り，全ひずみ理論で定義される全仕事と非線形弾性理論において導入される全変形エネルギとは同じ意味を有するものと考える。したがって，再負荷や除荷を考えないことにすれば，非線形弾性理論における非線形ひずみ成分と，全ひずみ理論における塑性ひずみ成分との間には類似関係が成立する。本章における簡便法はこの類似関係を利用するものであり，比較的大きい変形領域で有効であると考えられる。

また，上記簡便法の一例としてCr−Ni鋼の非線形材料定数の近似値を示している。

第6章　中実円形断面棒の非線形捩り変形問題に関する基礎式の適用

中実円形断面棒の捩り変形問題は捩り変形問題のうちで最も基本的な問題であるばかりでなく，Poynting効果，棒断面半径の減少，棒軸心における圧縮力の存在(いずれも 2^{nd} order 効果)等

の興味ある現象を考察するためにも重要な問題である。本章では中実円形断面棒に関して第4章で得られた基礎式の摂動解を求め，上記2^{nd} order効果と材料定数との関係を明らかにしている。また，得られた結果を用いて，捩り試験により非線形材料定数を求める場合の若干の指針を述べている。

さらに，第5章で求めたCr−Ni鋼の非線形材料定数の近似値を用いて若干の数値例を示し，従来未解決のまま残されている問題（すなわち，せん断応力やトルクに及ぼす面内変形の影響，面内等方性なる異方性の捩り変形に及ぼす効果等）を明らかにしている。

結　論

必要なだけ滑らかな変形を受ける弾性体を対象に，材料の様々な特性（すなわち，圧縮性を含む物性的非線形性，面内等方性等），及び幾何学的非線形性等を系統的に考慮して三次元有限変形理論をオーダ評価の手法を用いて直接簡易化し，非線形平面ひずみ問題，及び非線形捩り変形問題における基礎式を応力関数空間において構成した。変形前の物体の幾何学的諸量に関して得られた基礎式は，非線形平面ひずみ問題の場合には3個，非線形捩り変形問題の場合には5個の応力関数に関する非線形連立微分方程式となる。

また，基礎式に含まれる非線形材料定数の近似値を少数の材料試験結果から推定する簡便法を提案した。

次に，得られた基礎式を若干の基本的問題に適用し，非線形平面ひずみ，及び非線形捩り変形に関して様々な負荷に対し発生する応力の種類や大きさに及ぼす材料の種々の特性，並びに幾何学的非線形性の影響を系統的に解明した。

終りに臨み，終始懇切丁寧なご指導，ご鞭撻を賜わりました指導教官，玉手統教授に心から感謝の意を表します。また，本研究にあたり有益なご助言を賜わりました阿部博之助教授に深く感謝の意を表します。

審 査 結 果 の 要 旨

固体に働く外力が増すにつれて，物体形状の変化が無視できなくなり，材料の構成法則も次第に線形性を失い，さらに弾性異方性を示す材料も少なくない。この種の変形域における固体の変形挙動の解明には連続体の有限変形理論の適用を要するが，その基礎式が極めて複雑であるため，取扱う問題の特殊性に応じた理論の簡易化（二次元化）が望まれる。しかし従来のこの種の理論はほとんど過剰な拘束，重要な項の欠落あるいは適用範囲の不明確等の欠点を含んでいる。

本論文は，幾何学的並びに物性的非線形性と面内等方性とを考慮し，オーダ評価の手法を用いて非線形平面ひずみ問題及び非線形ねじり問題の基礎式を構成したもので，序論，2部6章と結論とからなる。

第1部は非線形平面ひずみ理論について述べている。第1章では，ひずみの最大値を $o(r)$ の量とするとき $o(r^2)$ より大きい項をすべて考慮して三次元有限変形理論を系統的に簡易化し，非線形平面ひずみ問題の基礎式を導いた。面内応力成分に対する応力関数と面外応力成分に対するそれとが連成している点等で，新基礎式は在来の理論と異なっており，重要な成果の一つであるといえる。

第2章では，新基礎式が含む5個の線形材料定数と9個の非線形定数とを，実在材料について定めるための実験について検討し，実用上有用な知見を示している。またこのような一組の実験結果を欠く場合の非線形材料定数の推定法を提案している。第3章は，円孔または円形介在物を含む無限体の応力集中問題に新基礎式を適用したもので，面内引張りと面外せん断との5種の基本的負荷等について摂動解を求め，その結果を対比して応力集中に対する非線形項の効果等につき幾多の有益な知見を提供している。

第2部は非線形ねじり理論に関するもので，第4章では，物性的非線形性を示す均質面内等方性体の一様断面真直棒につき，$o(r^3)$ より大きい項をすべて考慮して一般理論の系統的簡易化を行い，非線形ねじり変形の場の方程式と境界条件とを求めた。これは貴重な成果である。また，解析に創意が見られる。

第5章では，新基礎式に含まれる5線形材料定数と4非線形定数を定める一連の材料試験につき検討し，また一種の非線形材料定数推定法を提案している。第6章では，中実円形断面棒につき上記基礎式の摂動解を求め，非線形ねじり変形に伴う軸長変化，円半径の減少，軸心の圧縮応力等興味ある新知見を提供している。

以上要するに，本論文はオーダ評価法により有限変形理論を系統的に簡易化して非線形平面ひずみ問題及び非線形ねじり問題の新基礎式を構成し，幾何学的並びに物性的非線形性及び面内等方性の連成効果を明らかにする等有限変形理論の進展と充実に有益な成果を挙げており，固体力学及び機械工学に寄与するところ少なくない。

よって，本論文は工学博士の学位論文として合格と認める。