氏　　　　名	福　永　信太郎（ふく　なが　しん た ろう）
授　与　学　位	工　学　博　士
学位授与年月日	昭和51年3月25日
学位授与の根拠法規	学位規則第5条第1項
研究科，専攻の名称	東北大学大学院工学研究科 機械工学専攻（博士課程）
学位論文題目	**差分法による非定常粘性流れの基本解法の改善とその拡張**
指　導　教　官	東北大学教授　淵沢　定敏
論文審査委員	東北大学教授　淵沢　定敏　東北大学教授　伊藤　英覚 東北大学教授　西山　哲男　東北大学助教授　大宮司久明

論　文　内　容　要　旨

序　　論

粘性流体の運動は，周知のようにナビエ・ストークス方程式で表わされる。この方程式は非線形であるために，特別の場合を除いて厳密に解くことはむずかしく，かつては境界層近似，オセーン近似などの近似をして，これらの近似が成立する問題がもっぱら扱われていた。近年になって，大形電子計算機の発達によりこの方程式を数値的に直接解くことが可能になり，更に多くの流体工学上重要な問題が逐次解明されて来ている。しかしながら既存の数値解法は，大形電子計算機を使用しても，なお一般にかなり長時間の計算を必要とする。特に三次元問題では，未知数の数も多くなるので，計算機の記憶容量の不足と膨大な計算時間が障害となって，取扱える問題の範囲を非常に狭くしている。本論文では在来の数値解法に比べて短かい計算時間で解を求めることのできる数値解法を見つけることを主要な目的にしており，同時に，得られた基本解法を各

種の問題に適用できるように拡張することも試みている。

第Ⅰ部ではヘルムホルツのうず度方程式が，第Ⅱ部と第Ⅲ部ではナビエ・ストークス方程式が基礎式として用いられている。これらの式を差分式に置き換える際に，本論文では対流項に対して対流差分法を用いている。対流差分法が中心差分を用いる方法に比較して精度が良いことと，特性の方法に用いられている反復計算法を応用することによって解の精度が更に向上することは，ヘルムホルツのうず度方程式の場合について筆者らの文献[1]によって明らかにされている。本論文ではこれと同様の手法をナビエ・ストークス方程式にも適用する。

不等間隔格子は，流れが急激に変化する所にだけ細かい網目を用い，この部分で精度良く計算を行う目的で採用される。この格子を用いることによって全体の計算点の数を減らし，解の精度を高く保ったまま計算時間を短縮することができる。特に流路の上流，下流，物体まわりの流れの遠方では，格子間隔を大きくしても解の精度が悪くならないと考えられるので，不等間隔格子の使用は非常に有効である。この方法は現在，主として二次元並びに三次元の定常問題に採用されている。本論文に述べる方法は，不等間隔格子について適用できるようにしてある。

第Ⅰ部　壁に溝がある場合のクエット運動

第1章　緒　　言

平行平板間のクエット流れに関する理論的研究は，これまでに様々な因子を考慮して多くの著者によって報告されているが，壁面に直角に切られた溝の効果は，潤滑，シーリングに関して工学上興味があるにもかかわらず，ストークス近似のできるレイノルズ数の小さい場合しか調べられていない。ここでは筆者らによって先に提案された方法[1]を，壁に溝がある場合のクエット運動の解析に応用できるように拡張する。

第2章　基　礎　式

非圧縮性流体の非定常二次元粘性流れを記述する方程式は，ヘルムホルツのうず度方程式と流れ関数のポアソンの式である。これらの式を適当な境界条件の下に連立して解けば，流れの場が求められる。

第3章　解　　法

計算には不等間隔の長方形格子を用いる。ヘルムホルツのうず度方程式を対流差分法で置き換え，得られた差分式をエクスプリシットに解いたが，その際に特性の方法で用いられている反復計算を行った。そのことによって差分式の打切り誤差が減少し，同時にうず度方程式の非線形性に対する近似度が向上する。

第4章　固定壁に溝がある場合のクエット運動

従来流路の問題は圧力には無関係に流量が与えられて解かれてきた。クエット運動の問題では，流路に沿う圧力勾配あるいは流路端の圧力差と壁の速度が境界条件として与えられる。壁面上の流れ関数の値すなわち流量は未知数で，それは与えられた圧力の条件を満足するように決定されなければならない。この流量をエクスプリシットに求めることは困難である。ここではこの難点を克服するために，グリーンの公式を用いて得られる，流量と流路内部のうず度との関係式から初めに流量の推定値を見積り，与えられた圧力の条件が正確に満足されるように，反復計算のサイクルで流量を修正する手法を考案して用いた。

第5章　両方の壁に周期的に溝を持つ流路のクエット運動

両方の壁に溝がある場合は，流れの場の形状は壁の運動に従って時間と共に変化する。従来のクエット流れの理論的研究には，この種の問題は見当たらない。本論文では，両方の壁に別々に固定され，流路の中央近くで接して互いに滑る二つの格子を用いることによって，この問題の容易な取扱いに成功した。二つの格子の接触線近くでは，数値計算の際に計算点以外での値が必要になるが，ここでは近くの計算点の値を補間して用いることにした。

第6章　数値計算例

固定壁に長方形溝が一個ある場合と，両側壁が等間隔で長方形溝を持つ場合のクエット運動を数値解析し，反復計算の収束性が良好であることを示した。

第7章　結　　　言

流れ関数とうず度の方程式を用いる方法を拡張して，壁に溝がある場合の二次元クエット流れを解析した。

第Ⅱ部　非定常三次元粘性流れの数値解法

第1章　緒　　　言

三次元問題を数値解析する場合には，精度の良い解法を用いてできるだけ計算点の数を減らすことが肝要である。以下にはこの目的に沿って一つの数値解法を提案する。この解法は，ナビエ・ストークス方程式の対流項を対流差分法で置き換え，得られた差分式をエクスプリシットに解き，特性の方法で用いられている反復計算法を応用して解の精度を向上させるものであり，差分式を立てる際には不等間隔格子を使用している。

第2章　基　礎　式

非圧縮性流体の非定常三次元粘性流れを記述する方程式は，ナビエ・ストークス方程式と連続の式である。適当な環境条件の下にこれらの式を連立して解けば，流れの場が求められる。

第3章　解　　　法

計算する領域を不等間隔の直方体格子に分割し，圧力はその中心で，速度成分は座標軸に垂直な面の中心でそれぞれ定義する。境界面は直方体の面に一致するように選ぶ。まずナビエ・ストークス方程式を対流差分法で置き換え，この差分式をエクスプリシットに解いて速度を求め，次にナビエ・ストークス方程式と連続の式から導かれる圧力のポアソンの式を解いて圧力を求める。本解法ではこれに続いて，特性の方法で用いられている反復計算法を用いて解の精度を向上させる。この反復計算を行うことによって，差分式の打切り誤差が減少し，方程式の非線形性が一層良く近似されることになる。

次に圧力に対する境界条件の式を導き，計算のフローチャートを示し，更に本解法の第1近似と反復計算を行った後の第N近似の差分式の打切り誤差を求めて，反復計算による解の精度の改善を理論的に説明している。

第4章　二次元急拡大流路の非定常流れ

簡単な二次元問題について，本解法と既存の解法を用いて数値計算を行い，結果を比較することによって本解法による大幅な改善を具体的に示した。本解法は，反復計算を行うためにその分の計算時間は長くなるが，格子間隔を大きくしても精度が悪くならないので全体の計算時間は大幅に短縮される。

第5章　立方体空所内の三次元循環流れ

上面が突然加速される立方体内部の非定常循環流れの計算を行い，三次元問題に対して本解法で安定に解を求めることができることを示し，上辺が突然加速される正方形内部の非定常二次元循環流れと比較した。

第6章　正方形断面を持つL形ダクトの流れ

流路端の圧力差が与えられる曲ったダクトの非定常流れの問題を，ここに提案した方法によって解析し，主流の時間的な変化と壁に沿う圧力の変化並びに二次流れの発達と減衰の様子を明らかにした。

第7章　結　　言

速度と圧力の方程式を用いる非定常三次元粘性流れの一解法を提案した。まず簡単な二次問題の計算を行い，本解法の精度が既存の解法のものよりも良いことを示し，次にいくつかの三次元問題を計算し，本解法が十分なものであることを示した。

第Ⅲ部　遠心力とコリオリ力が作用する，回転している曲った流路の非定常三次元粘性流れ

第1章　緒　　言

現在報告されている非定常三次元粘性流れの数値解法は，円柱座標を使用するものもあるが，大部分はデカルト座標を使用している。ここでは第Ⅱ部に提案した基本解法を，回転双曲面座標の格子点に適用できるように拡張する。また同時に，境界が格子の面に対して傾斜している場合も取扱うことができるように改良して，適用できる問題の範囲を拡大した。

第2章　基　礎　式

回転している，一般回転体座標を用いて，遠心力とコリオリ力を入れたナビエ・ストークス方程式と連続の式を，ベクトルの形で呈示する。

第3章　解　　法

回転双曲面座標を用いる場合のナビエ・ストークス方程式の各成分の式と連続の式を，前章に呈示した基礎式から導き，次にその差分式を求め，計算手順と境界条件を説明する。ナビエ・ストークス方程式を対流差分法で置き換え，特性の方法で用いられている反復計算を行うことによって解の精度を向上することは第Ⅱ部に提案した解法と同様であるが，ここでは境界が格子の面に対して傾斜している場合も取扱うことができるように圧力のポアソンの式の境界条件を改良している。

第4章　数値計算例

斜流ポンプの羽根車の流路に良く似た，回転している流路に対して数値解析を行い，流路内の速度分布，圧力分布並びに二次流れの様子を明らかにした。

第5章　結　　言

第Ⅱ部に提案した基本解法を拡張して，遠心力とコリオリ力が作用する，回転している流路の非定常三次元粘性流れの計算を行い，斜流ポンプの羽根車の流れとの関連において興味ある結果

を得た。

総　　括

差分法による非定常二次元並びに三次元粘性流れの基本解法を改善して，解の精度向上と計算時間の短縮を計り，次にこの基本解法を拡張して，工学的に興味ある実際の流れを解析し，またそのための手段を提供した。

文　　献

(1) 大宮司，白畑，福永：日本機械学会論文集，41巻346号（昭和50年6月），1810ページ，1820ページ。

審査結果の要旨

ナビエ・ストークス方程式を解いて粘性流体の非定常流れを解明することは，流体工学の基本的かつ重要な課題の一つである。かつてはもっぱら境界層近似，オセーン近似などの近似により解かれていたが，近年，電子計算機の発達に伴って直接数値的に解くことが可能になり，多様な問題の解明に役立っている。しかしながらこの解法は，大型電子計算機によってもなお一般にかなりの計算時間を要し，このことが取扱える問題の範囲を限定している。本論文は，この難点を克服することを主要な目的としており，序論，第Ⅰないし第Ⅲ部と総括からなる。

序論では，在来の非定常三次元粘性流れの解法を展望し，本研究の目的と意義を明らかにしている。

第Ⅰ部では，流れ関数とうず度の方程式を用いる方法を拡張して，壁に溝がある場合の二次元クエット流れを解析している。流れの領域の境界が時間とともに変化する場合を扱っていることが特色である。

第Ⅱ部では初めに，流速と圧力の方程式を用いる非定常三次元粘性流れの一解法を提案している。本解法は対流差分法を用いるもので，二つの計算技術，すなわち，高次の対流差分式を新たに考案して用いたことと，不等間隔長方形格子を用いたことによって上記の難点をある程度克服することに成功している。そしてまず簡単な二次元流れの問題について，本解法と在来解法の精度の比較を行い，大幅な改善を具体的に示した後に，いくつかの三次元問題を解いて安定に解を求めることができることを示している。

第Ⅲ部では，以上の基本解法を回転双曲面座標系上の格子に適用できるように拡張し，また同時に格子をななめに横切る境界も取扱えるように改良している。遠心力とコリオリ力の作用する回転している流路の流れを解析しているが，在来の研究が粘性を無視しているのとは対照的に高粘性の場合を扱っているという点で，流体機械の開発に有益な示唆に富む結果を提供していると言える。

以上要するに，本論文は差分法による非定常二次元および三次元の粘性流れの基本解法に改善を加え，解の精度向上と計算時間の短縮を図るとともに，この基本解法を拡張して，工学的に重要な実際の流れを解析し，またそのための手段を提供したもので，流体工学に寄与するところ少なくない。

よって，本論文は工学博士の学位論文として合格と認める。