氏名	鳴瀬勝房（なるせかつふさ）
授与学位	工学博士
学位授与年月日	昭和51年3月25日
学位授与の根拠法規	学位規則第5条第1項
研究科，専攻の名称	東北大学大学院工学研究科 精密工学専攻（博士課程）
学位論文題目	**金属円板の深絞り加工におけるフランジしわならびにその抑制に関する解析的研究**
指導教官	東北大学教授　竹山　寿夫
論文審査委員	東北大学教授　竹山　寿夫　　東北大学教授　戸部　俊美 東北大学教授　槌川　武男

論文内容要旨

緒言

金属円板の深絞り加工においてフランジ部に発生するしわは塑性座屈現象の一種である。しかしこのフランジしわに関する従来の理論解析は弾性座屈からの類推によるものが多く，明確な根拠をもつ塑性座屈理論に基く解析的研究はまだ試みられていない。塑性変形を受ける系の座屈問題を取扱う際の正当な理論はR.Hill によって与えられているが，この理論によると平衡状態が唯一である限界点，すなわち分岐点は下限の座屈荷重を与えることが明らかとなる。本研究はこのような理論的根拠から唯一性に対するR.Hill の規準をフランジ部のモデルに対して適用し，分岐点としてのしわの発生点を求めることにより実際の加工におけるしわの挙動を解明するための基礎を得ることを目的とする。

第一章　基礎理論

弾塑性体に対する解の唯一性に関する規準および変分原理の概要を述べる。

○解の唯一性に対するR.Hillの十分条件

$$I(\triangle\dot{u})=\int_{V^0}\triangle\dot{s}^{ij}\triangle\left(\frac{\partial\dot{u}_j}{\partial x^i}\right)dV^0>0 \qquad (1.16)$$

がSu^0上で$\triangle u_j=0$となる恒等的に0とならないすべての$\triangle\dot{u}_j$に対して成立するとき解は唯一である。ここに$\dot{s}^{ij}$は公称応力速度であるが，諸量に付した△が任意の二組の解の差を表わすため非可逆な応力ひずみ関係によって評価される$\triangle\dot{s}^{ij}$は$\triangle\dot{u}_j$に関して多価性を示すことになり（1.16）は実用に不便である。そこで弾塑性体の応力ひずみ関係から導かれる不等式を利用して汎関数

$$I^L(\triangle\dot{u})=\int_{V^0}\Big[(E^{ijkl}-H^{ijkl})\triangle\dot{\varepsilon}_{kl}\triangle\dot{\varepsilon}_{ij}+\sigma^{ij}\triangle\left(\frac{\partial\dot{u}^K}{\partial x^K}\right)\triangle\dot{\varepsilon}_{ij}$$

$$-\sigma^{ik}\Big\{2\triangle\dot{\varepsilon}^j_K\triangle\dot{\varepsilon}_{ij}-\triangle\left(\frac{\partial\dot{u}^j}{\partial x^K}\right)\triangle\left(\frac{\partial\dot{u}_j}{\partial x^i}\right)\Big\}\Big]dV^0 \qquad (1.23)$$

を定義すれば$I\geqq I^L$となるから$I^L>0$を唯一性の十分条件として採用する。ここに（$E^{ijkl}-H^{ijkl}$）はPrandtl－Reussの応力ひずみ関係における負荷の場合の係数であり，σ^{ij}は真応力である。

○変分原理

弾塑性変形における変分原理は平衡に関する基礎式および仮想仕事の原理を用いて導かれるが，特に応力ひずみ関係の係数が対象である場合には

$$J(\dot{u})=\int_{V^0}\frac{1}{2}\left(\dot{\tau}^{ij}\dot{E}_{ij}+\tau^{ij}\dot{u}^K{}_{,i}\dot{u}_{K,j}\right)dV^0-\int_{S^0}\dot{T}^i\dot{u}_i\,dS^0 \qquad (1.40)$$

なる汎関数を定義すると$\delta J=0$と表わすことができる。ここに$\dot{\tau}^{ij}$はKirchhoffの応力速度，$\dot{E}_{ij}$はGreenのひずみ速度，$\dot{T}^i$は公称表面力速度である。

第二章　円板に対する分岐点としての座屈条件式およびダイスがない場合の分岐点を与える基礎式

実際の加工におけるフランジ部を無変形時において外半径Ro，内半径Ri，板厚toなる有孔円板と考える。この有孔円板が円孔の内縁に沿う中心向きの引張力の作用を受けて軸対称絞り変形をしている状態を基本状態としてダイスがない場合の唯一性の限界点を与える基礎式を導く。R.Hillの条件をKirchhoffの応力およびその速度を用いて表わすと変分法により導かれる分

岐点の基礎式は次式となる。

$$\triangle\dot{M}r,rr+\frac{1}{r^2}\triangle\dot{M}\theta,\theta\theta+\frac{2}{r}\triangle\dot{M}r\theta,r\theta+\frac{2}{r^2}\triangle\dot{M}r\theta,\theta+\frac{2}{r}\triangle\dot{M}r,r-\frac{1}{r}\triangle\dot{M}\theta,r$$

$$+N^r\triangle\dot{w},rr+N^\theta\left(\frac{1}{r}\triangle\dot{w},r+\frac{1}{r^2}\triangle\dot{w},\theta\theta\right)=0 \qquad (2.28)$$

内縁固定の場合

$r=Ri$ において　$\triangle\dot{w}=0$　$\triangle\dot{w},r=0$　(2.31)

$r=r_0$ において　$\triangle\dot{M}_r=0$　$\triangle\dot{M}_{r,r}+\dfrac{\triangle\dot{M}r-\triangle\dot{M}\theta}{r}+\dfrac{2}{r}\triangle\dot{M}_{r\theta,\theta}=0$　(2.33)

$\theta=0,\dfrac{\pi}{N}$ において　$\triangle\dot{w}=0$　$\triangle\dot{M}\theta=0$　(2.34)

内縁支持の場合

$r=Ri$ において　$\triangle\dot{w}=0$　$\triangle\dot{M}r=0$　(2.32)

$r=r_0$ において　$\triangle\dot{M}r=0$　$\triangle\dot{M}_{r,r}+\dfrac{\triangle\dot{M}r-\triangle\dot{M}\theta}{r}+\dfrac{2}{r}\triangle\dot{M}_{r\theta,\theta}=0$　(2.33)

$\theta=0,\dfrac{\pi}{N}$ において　$\triangle\dot{w}=0$　$\triangle\dot{M}\theta=0$　(2.34)

ここに断面量$\triangle\dot{M}r$，$\triangle\dot{M}\theta$，$\triangle\dot{M}r\theta$は負荷の応力ひずみ関係を用いて$\triangle\dot{w}$より評価される。Nは円周方向のしわ数である。

第三章　ダイスがない場合のしわの発生点の計算

第二章で得た分岐点を与える基礎式の解を

$$\triangle\dot{w}=f(r)\sin N\theta \qquad (3.7)$$

なる変数分離形に仮定すると分岐点は次の線形常微分方程式で表わされる固有値問題の固有値として求まる。

$$B_1\frac{d^4f}{dr^4}+B_4\frac{1}{r}\frac{d^3f}{dr^3}+(B_6-N^2B_2)\frac{1}{r^2}\frac{d^2f}{dr^2}+(B_8-N^2B_5)\frac{1}{r^3}\frac{df}{dr}+N^2(N^2B_3-B_7)\frac{1}{r^4}f=0 \qquad (3.8)$$

内縁固定の場合

$$\left.\begin{array}{ll} r=Ri\ \text{において} & f=0\quad \dfrac{df}{dr}=0 \\ r=r_0\ \text{において} & f_{11}\dfrac{d^2f}{dr^2}+f_{12}\dfrac{1}{r}\dfrac{df}{dr}-N^2f_{12}\dfrac{1}{r^2}f=0 \\ & B_9\dfrac{d^3f}{dr^3}+B_{11}\dfrac{1}{r}\dfrac{d^2f}{dr^2}+(B_{13}-N^2B_{10})\dfrac{1}{r^2}\dfrac{df}{dr}-N^2B_{12}\dfrac{1}{r^3}f=0 \end{array}\right\} \qquad (3.9)$$

内縁支持の場合

$$r=Ri\ \text{において}\qquad f=0\qquad f_{11}\frac{d^2f}{dr^2}+f_{12}\frac{1}{r}\frac{df}{dr}-N^2f_{12}\frac{1}{r^2}f=0$$

$$
r = r_0 \text{において} \quad \left.\begin{array}{l} f_{11}\dfrac{d^2f}{dr^2} + f_{12}\dfrac{1}{r}\dfrac{df}{dr} - N^2 f_{12}\dfrac{1}{r^2} f = 0 \\[2ex] B_9\dfrac{d^3 f}{dr^3} + B_{11}\dfrac{1}{r}\dfrac{d^2f}{dr^2} + (B_{13} - N^2 B_{10})\dfrac{1}{r^2}\dfrac{df}{dr} - N^2 B_{12}\dfrac{1}{r^3} f \end{array}\right\} \quad (3.10)
$$

ここにB_i，f_{11}，f_{12}は基本状態の応力分布，形状によって決まる既知量である。各境界条件に対して分岐点の計算を行った結果，絞り始めてから最初に発生するしわの数がわかった。また分岐点の絞り比Ro/Ri，形状係数 2Ro/to，および材料定数による変化が明らかとなり実際の加工におけるフランジしわの発生に関するいくつかの基礎資料を得ることができた。

第四章　塑性ひずみ速度を応力速度に依存させた場合の解析

Prandtl－Reussの応力ひずみ関係を用いて得られる理論座屈荷重は一般に実験値に比べて高目となるが，現在の問題ではその原因の一つとして座屈変形の際の塑性的なせん断変形が考慮されない点を指摘することができる。そこで塑性ひずみ速度を応力速度と関連させた応力ひずみ関係　$\dot{\varepsilon}_{ij}{}' = \dfrac{3}{2E^T}\,\dot{\sigma}_{ij}{}' \quad \dfrac{1}{E^T} = \dfrac{1}{E} + \dfrac{1}{H'}$　(4.3)

を用いてダイスがないときの分岐点の解析を試みる。ここにE^Tは接線係数，H'は塑性曲線の勾配である。得られた結果はPrandtl－Reussの関係を用いた第三章の解析結果に比べて低目となり実験値の良い近似を与えることがわかった。

第五章　円周方向の座屈波形について

ダイスがないときの分岐点は円周方向の座屈波形を正弦曲線に仮定して得られたものであるが，この仮定の妥当性を解析的に調べるために偏微分方程式で与えられる分岐点の基礎式を二次元の差分化方程式に近似して解析を行う。基礎式の差分近似を行って得られる連立一次方程式は

$$[G]\{\Delta \dot{w}\} = 0 \qquad (5.13)$$

と表わされる。従って分岐点は斉次方程式（5.13）が恒等的に0でない解$\{\Delta \dot{w}\}$をもつための条件　$\det[G] = 0$　(5.14)

が満たされるときの変形パラメータとして求まる。また座屈形状は（5.13）より定数倍の任意性の範囲で定まる。この手法で得られた円周方向の座屈波形は正弦曲線と良く一致することが確かめられた。

第六章　しわ押え力としてバネ力が作用する場合のしわの発生点

しわ押え力が基本状態において板厚の最大となる外縁の最大たわみ点に集中して作用するものと考えるとR. Hillの条件より変分法を用いて導かれる分岐点の基礎式は偏微分方程式となるが，

この場合には板厚方向の変位がダイス面上に限定されることを考慮する必要があるため変数分離による基礎式の処理が困難になる。そこで変分問題の直接解法を応用して常微分方程式で表わされる分岐点の基礎式を導く。

$$\triangle \dot{w} = f(r)(1 + \cos N\theta) \tag{6.15}$$

なる比較関数を用いて得られる分岐点の基礎式は次のようになる。

$$C_1 f'''' + C_2 f''' + C_3 f'' + C_4 f' + C_5 f = 0 \tag{6.24}$$

内縁固定の場合

$$\left.\begin{array}{ll} r = R_i \text{ において} & f = 0 \quad f' = 0 \\ r = r_0 \text{ において} & C_6 f''' + C_7 f'' + C_8 f' + C_9 f = 0 \\ & C_{10} f'' + C_{11} f' + C_{12} f = 0 \end{array}\right\} \tag{6.25}$$

内縁支持の場合

$$\left.\begin{array}{ll} r = R_i \text{ において} & f = 0 \quad C_{10} f'' + C_{11} f' + C_{12} f = 0 \\ r = r_0 \text{ において} & C_6 f''' + C_7 f'' + C_8 f' + C_9 f = 0 \\ & C_{10} f'' + C_{11} f' + C_{12} f = 0 \end{array}\right\} \tag{6.26}$$

ここに係数 C_9 はバネ定数Kに関する項を含む。以上の基礎式により計算を持った結果，分岐点および絞り開始後最初に発生するしわの数に与えるバネ定数Kの影響が明らかとなり，バネ力のしわの抑制効果を確かめることができた。

第七章　しわ押え力として一定の初期力が作用する場合のしわの発生点（内縁固定の場合）

しわ押え力の大きさが予め指定された一定値である場合はR.Hill の条件を用いた分岐点の解析が不可能になる。従ってこの場合には基本状態近傍の曲げ変形を解析し，そのたわみ0の極限として分岐点を求める。曲げ変形の解析はダイスによるたわみの限定条件があるため変分原理を用いて行う。

○微小変形の仮定に基づく弾性解析

$$\dot{w} = f(r)\ (1 + \cos N\theta) \tag{7.9}$$

なる比較関数を用いて汎関数 $J(\dot{w})$ の停留条件より導かれる近傍曲げ変形の基礎式は次式となる。

$$P_1 f'''' + P_2 f''' + P_3 f'' + P_5 f = 0 \tag{7.16}$$

$$\left.\begin{array}{ll} r = R_i \text{ において} & f = 0 \quad f' = 0 \\ r = r_0 \text{ において} & P_6 f''' + P_7 f'' + P_8 f' + P_9 f + \dfrac{2Q}{\pi} = 0 \\ & P_{10} f'' + P_{11} f' + P_{12} f = 0 \end{array}\right\} \tag{7.17}$$

ここにQは初期力である。この解析結果から初期力の分岐点に与える特徴的な効果を知ることができた。

○弾塑性解析

$$
\left.
\begin{aligned}
&\dot{u} = C_1 \frac{r}{r_o}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{r_o}{r} - 1\right)^{-3} \qquad \dot{v} = 0 \\
&\dot{w} = C_2 K_1 \left\{ 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + K_2 x^3 + K_3 x^5 \right\}\left(1 + \cos N\theta\right) \\
&K_1 = \frac{1}{2 - \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi^3}{160}} \quad K_2 = -\frac{\pi^3}{96} \quad K_3 = \frac{\pi^3}{320} \quad x = \frac{r - R_i}{r_o - R_i}
\end{aligned}
\right\} \qquad (7.28)
$$

なる比較関数を用いて曲げ変形の解析を行う。ここにC_1，C_2は未定定数である。その結果，初期力の有無によって分岐点に大きな差を生ずることが明らかとなった。

終りに本研究を行うにあたって終始御指導をたまわった竹山寿夫教授ならびに伊藤耿一助手に心から感謝の意を表します。

審査結果の要旨

金属薄板の深絞り加工は，その実用性と塑性変形上の著しい特徴とにより従来多くの研究が行われてきた。加工の基本となる円板の深絞り加工については塑性力学による詳しい解析が行われ，板の変形能力の限界がある程度解明されてきたが，加工の成否に大きな影響をもつしわについての解析は妥当性をもつ研究が殆どみられない。本研究はR. Hillの提出した定理に基づいてしわの発生ならびにしわ抑えの効果等を正当な解析的取扱いにより解明したもので，緒言，本文7章および結論より成る。

緒言では，従来の研究における問題点と，本研究の目的についてのべている。

第一章では，変形の大きい場合における座屈発生の限界決定をR. Hillの唯一性の基準に基づき線型比較体によって行い，またその根拠と意義を説明し，これらをKirchhoffの応力速度を用いた変分問題に変換し本研究の基礎式を導出している。

第二章では基礎式を，円板の深絞り加工のフランジ部に適用するために極座標に変換し，これより分岐点決定の微分方程式ならびに境界条件式を導き，またいわゆる近傍平衡の方法より導かれる平衡方程式を求め，両者を比較検討し一致する条件を明確にした。

第三章ではダイスがない場合としてフランジ部の座屈を円周方向のたわみを正弦関数型と仮定して，数値的に基礎方程式を解き塑性変形域において生ずる円周方向のしわ数と外周のひき込み量との間の関係を定め，最初に発生するしわ数を定めた。円板の内縁が固定型境界条件の場合が単純支持型の場合よりしわの発生は遅れること，絞り完了直前においても再びしわが発生し得ることを示した。ヤング率が大きいほど，加工硬化の大きい板ほどまたしぼり比が小さい程，ひき込み量の大きい位置まで座屈が発生しないこと，形状係数がある程度小さくなるとしわが発生しないことなどを量的に明らかにした。

第四章では上に得られた外周引込み量が実験値よりも大きくなる傾向にある点について考察を行い，剪断変形を考慮し得るように，ひずみ速度・応力速度に比例関係を導入して解析を行い，しわの発生点のひき込み量が減少することを示した。

第五章にはたわみ形の吟味が述べられている。円周方向のたわみについて仮定を置かずに数値解析を行い，その結果円周方向のたわみ形は正弦関数で十分表わされることを確かめている。

つぎにダイス上の円板の周辺しわについて，しわ抑え力のない場合について，またしわ抑え力がある場合について円板の外縁最大撓みの位置に作用するものと仮定して，研究をすすめた。

第六章ではしわ抑え力を作用点の撓みに比例して増大するバネ力として取扱い，板の諸性質に対応して最初に発生するしわ数を求め，しわ抑制効果のあることを示した。

さらに第七章では一定のしわ抑え力が作用する場合に弾性しわならびに塑性しわについて近傍

平衡の方法により解析し，理論上の分岐点荷重としてはしわ抑えなしの場合の数倍になり得ることを示した。

以上要するに，本論文は円板の深絞り加工において発生するフランジしわについて，その発生ならびにしわ抑えの効果等についてはじめて正当な理論に基づく解析を行い有用な結果を得たもので，精密工学ならびに精密工業に寄与するところが少なくない。

よって，本論文は工学博士の学位論文として合格と認める。