氏　　　　名	小(こ)　林(ばやし)　由(ゆ)紀(き)男(お)
授　与　学　位	工　学　博　士
学位授与年月日	昭和51年3月25日
学位授与の根拠法規	学位規則第5条第1項
研究科，専攻の名称	東北大学大学院工学研究科 電気及通信工学専攻（博士課程）
学位論文題目	**有限オートマトンの代数論的研究**
指　導　教　官	東北大学教授　本多　波雄
論文審査委員	東北大学教授　本多　波雄　東北大学教授　野口　正一 東北大学教授　木村　正行　東北大学助教授　那須　正和

論　文　内　容　要　旨

本内容要旨において主に用いられている基本的記号および記法はつぎのものであり，以後説明は省略する。

$\mid A \mid$	集合Aの濃度
X	デカルト積
$X \underset{\mathrm{def}}{=} Y$	XをYで定義する
$X \Longrightarrow Y$	論理的にXからYが導かれる
fg	写像 f と gの合成（$fg(x)=g(f(x))$）
Q	有限オートマトンの状態集合
B	$B=(Q,\Sigma,\delta)$，有限オートマトン

S(B)	Bの入力半群
T(B)	Bの入力群
E(B)	Bの自己準同型写像半群
G(B)	Bの自己同型写像群
S−…	半群論的な意味で … である
$S_1 \dashv_e S_2$	半群S_1は半群S_2に埋め込まれる
$S_1 \lesssim \Pi_{i=1}^{n} S_i'$	半群S は半群Si, i=1,……,n, の部分直積にS-同型である。

有限オートマトンと半群に関する基本的諸概念は文献〔1〕,〔2〕,〔3〕によるものとし，本内容要旨においては省略する。

第1章　序　　論

本研究は有限オートマトンの構造論的性質を論ずる場合に重要な2つの置換群，すなわち自己同型写像群と入力群に関する代数論的研究である。ここで入力群とは，入力記号系列で決まる状態集合の上の変換の中で置換であるもの全部がつくる写像の合成を演算とする群である。

第2章　諸定義と基本的性質

本研究において重要な意味を持つ2つの擬順序$\leq e$, $\leq s$とそれから導かれる2つの等値関係πe, πsが状態集合Qの上に定義され，πeとπsに関してそれぞれ自己同型写像群G(B)の正規部分群G_I(B)と入力群T(B)の正規部分群T_I(B)が定義される。なお本要旨においては，補題，定理等の証明は省略する。

定義1.　($\leq e$, $\leq s$, πe, πs) Qの上にある変換半群をHとするとき，π_Hをつぎのように定義する。　q_1, $q_2 \in Q$について，

$q_1 \leq_H q_2 \overset{\Leftrightarrow}{\text{def}}$ 全ての f, g∈Hについて，$f(q_1)=g(q_1)$ ならば $f(q_2)=g(q_2)$ である。

$q_1 \pi_H q_2 \overset{\Leftrightarrow}{\text{def}}$ $q_1 \leq_H q_2$ でありかつ $q_2 \leq_H q_1$ である。

H=E(B)(S(B))のとき$\leq_H$を$\leq e$ ($\leq s$)と，またπ_Hをπe(πs)と表わす。

補題1.　(1) $q_1 \pi e\ q_2$ ならば，全ての h∈E(B)について $h(q_1) \pi e\ h(q_2)$ である。

(2) $q_1 \pi s\ q_2$ ならば，全ての $f_{<x>} \in S(B)$について，$f_{<x>}(q_1) \pi s\ f_{<x>}(q_2)$である。

補題2.　(1)全ての q∈Qと $f_{<x>} \in T(B)$について，$f_{<x>}(q) \pi e\ q$ である。

(2)全ての q∈Qと f∈G(B)について，$f(q) \pi s\ q$ である。

πをQの上のある等値関係とし，$Q=U(Q_i^{\pi} : i=1, \cdots, n)$でQの$\pi$による分割を表わし，これをQの$\pi$－分割と呼ぶ。$\pi=\pi e(\pi s)$のときは$Q=U(Q_i^{e} : i=1, \cdots, m)$ $(Q=U(Q_i^{s} : j=1, \cdots, n))$と書く。

定義2. HをQの上ある変換とし，πと$<$をそれぞれQの上の等値関係と擬順序とする。Qの上のπ− 分割を$Q=\cup(Q_i^{\pi}: i=1,\cdots,n)$とするとき，Hの上の関係$\omega_i^{\pi}$，$i=1,\cdots n$，と剰余類の集合$Q/\pi=\{Q_i^{\pi}: i=1,\cdots,n\}$の上の関係〔$<$〕をつぎのように定義する。

$f\,\omega_i^{\pi}\,g \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 全ての$q\in Q_i^{\pi}$について，$f(q)=g(q)$である。

Q_i^{π}〔$<$〕$Q_j^{\pi} \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 全ての$q_i\in Q_i^{\pi}$と$q_j\in Q_j^{\pi}$について，$q_i<q_j$である。

$\pi=\pi e(\pi s)$のときω_i^{π}を$\omega_i^{e}(\omega_i^{s})$のように書くことにする。

定義3. G(B)の部分群$G_I(B)$とT(B)の部分群$T_I(B)$をつぎのように定義する。

$G_I(B)=\{f\in G(B)$：全ての$q\in Q$について，$q\,\pi e\,f(q)$である$\}$，

$T_I(B)=\{f_{<x>}\in T(B)$：全ての$q\in Q$について，$q\,\pi s\,f_{<x>}(q)$である$\}$。

また，Qのπe−分割とQのπs−分割に関してそれぞれ$Gi(B)$，$i=1,\cdots,m$，と$Tj(B)$，$j=1,\cdots,n$，をつぎのように定義する。

$$Gi(B)=G_I(B)/\omega_i^{e},\quad i=1,\cdots,m,$$
$$Tj(B)=T_I(B)/\omega_j^{s},\quad j=1,\cdots,n$$

第3章 $G_I(B)$と$T_I(B)$の性質

第4章，第5章の有限オートマトンの構造論的性質は，前章で定義された2つの群$G_I(B)$と$T_I(B)$に基づいて議論される。本章では，それら2つの群の構造論的性質と，それらの間のある双対性について述べる。

補題3. (1) $G_I(B)$はG(B)の正規部分群である。

(2) $T_I(B)$はT(B)の正規部分群である。

命題1. (1)因子群$G(B)/G_I(B)$は$Q/\pi e$の上の順序〔$\leq e$〕を保存する置換群に埋め込まれる。

(2)因子群$T(B)/T_I(B)$は$Q/\pi s$の上の順序〔$\leq s$〕を保存する置換群に埋め込まれる。

さらに，$T(B)/T_I(B)\cdot\dashv e\ T(B/\pi s)$である。ここで$B/\pi s$はBの$\pi s$による商オートマトンである。

$Q=\cup(Q_i^{e}: i=1,\cdots,m)$と$Q=\cup(Q_j^{s}: j=1,\cdots,n)$をそれぞれ$\pi e$− 分割と$\pi s$− 分割とする。

補題4. (1) $Gi(B)$はQ_i^{e}の上の正則置換群である（$i=1,\cdots,m$）。

(2) $Tj(B)$はQ_j^{s}の上の正則置換群である（$j=1,\cdots,n$）。

定理1. (1) $G_I(B)\lesssim \Pi_{i=1}^{m}\ Gi(B)$

(2) $T_I(B)\lesssim \Pi_{j=1}^{n}\ Tj(B)$

第4章　構造論的性質－Ⅰ

本章では，状態集合が入力群や自己同型写像にどのように関係しているかを明らかにする。すなわち，$|Q|$は群$Gi(B)$, $i=1,\cdots,m$, の位数の整数倍の和であり，また$Tj(B)$, $j=1,\cdots,n$,の位数の整数倍の和である。

πeとπsの共通をπtとし，πt－分割を$Q=\cup(Q_h^t : h=1,\cdots,l)$と表わす。

定理2.　(1)全ての$i\in\{1,\cdots,m\}$と$j\in\{1,\cdots,n\}$について，ある正の整数$a_G(i)$と$a_T(j)$が存在して，等式

$$|Q_i^e| = a_G(i)\,|Gi(B)|$$

$$|Q_j^s| = a_T(j)\,|Tj(B)|$$

が成立する。

(2)全ての$h\in\{1,\cdots,l\}$について，ある正の整数$b_G(h)$と$b_T(h)$が存在して，等式

$$|Q_h^t| = b_G(h)\,|Gi(B)|$$

$$= b_T(h)\,|Tj(B)|$$

が成立する。ここで$Q_h^t=Q_i^e\cap Q_j^s$である。

系　　ある正の整数αi, $i=1,\cdots,m$, とβj, $j=1,\cdots,n$, が存在し，等式

$$|Q| = \alpha_1\,|G_1(B)| + \cdots\cdots + \alpha_m\,|Gm(B)|$$

$$= \beta_1\,|T_1(B)| + \cdots\cdots + \beta_n\,|Tn(B)|$$

が成立する。

さらに本章においては，上記の定理と同様の関係が成り立つ$G(B)$や$T(B)$の部分群が存在することを示し，それらの部分群の性質についても議論しているがここでは省略する。

第5章　構造論的性質－Ⅱ

本章においては，自己同型写像群と入力群の間の関係についての議論が展開されている。

πe－分割$Q=\cup(Q_i^e : i=1,\cdots,m)$と$\pi s$－分割$Q=\cup(Q_j^s : j=1,\cdots,n)$について，それぞれ群$T^i(B)$, $i=1,\cdots,m$, と群$G^j(B)$, $j=1,\cdots,n$,をつぎのように定義する。

$$T^i(B) = T(B)/\omega_i^e \quad , \; i=1,\cdots,m,$$

$$G^j(B) = G(B)/\omega_j^s \quad , \; j=1,\cdots,n$$

補題2と定義2より上記の群はwell－definedであることが示される。

命題2.　(1) $G(B) \lesssim \Pi_{j=1}^{n}\ G^j(B)$

(2) $T(B) \lesssim \Pi_{i=1}^{m}\ T^i(B)$

補題5. 群Gと左零半群P(N)の直積である左群を$S=G\times P(N)$とする。hをP(N)の上の任意の置換，gをP(N)からGへの任意の写像とする。Sの上の変換$\Psi\langle g, h\rangle$をつぎのように定義する。　$(x, a)\in G\times P(B)$について，

$$\Psi\langle g, h\rangle(x, a)=(g(a)\cdot x, h(a))$$

ここで・はGの上の演算である。

このとき，$\Psi\langle g, h\rangle$はSの上の全単射である左移動であり，逆にSの上の全単射である左移動は全て上記の形で与えられる。

$\Psi\langle g, h\rangle$と$\Psi\langle g', h'\rangle$が補題5のように与えられる$S=G\times P(N)$の上の2つの左移動とすると，それら2つの写像の合成はつぎのように与えられる。$(x, a)\in G\times P(N)$について，

$$\Psi\langle g, h\rangle\Psi\langle g', h'\rangle(x, a)$$
$$=(hg'(a)\cdot g(a)\cdot x,\ hh'(a))$$

左群Sの上の全単射である左移動が上記の写像の合成でつくる群を$\mathcal{T}(S)$と表わす。また位数Nの左零半群をP(N)と書くことにする。

定理3. (1) $G^j(B)\dashv_e\mathcal{T}(T_j(B)\times P(a_T(j)))$, $j=1,\cdots,n$，ここで$|Q_j^s|=a_T(j)|T_j(B)|$である。

(2) $T^i(B)\dashv_e\mathcal{T}(G_i(B)\times P(a_G(i)))$, $i=1,\cdots,m$，ここで$|Q_i^e|=a_T(i)|G_i(B)|$である。

第6章　特殊なワウスの有限オートマタ

本章は，以上の一般的な結果と，従来の特殊な有限オートマトンについて得られる結果を比較することによって，特殊な有限オートマトンの構造が一般の有限オートマトンの構造にどのように拡張されているのかを示している。

参　考　文　献

〔1〕 Ginzburg,A. "Algebraic Theory of Automata", Academic, New York, 1968.

〔2〕 Clifford,A.H and Preston,G.B "The Algebraic Theory of Semigroups, Vol.1 (1961), Vol.2(1967), AMS Surveys 7, Providence, R.I.

〔3〕 田村孝行 " 半群論 ", 共立出版株式会社, 東京, 1972.

審 査 結 果 の 要 旨

有限オートマトンの構造の研究には代数論的な方法が有力である。この方法は，オートマトンの構造を自己同型写像群および入力群という状態集合の上の二つの置換群で特徴づけ，この群の構造論的性質を解明しようとするもので，近年かなり活発に研究されてきた。しかし従来の研究は強連結オートマトン，状態独立オートマトンなどの特殊なクラスのオートマトンを対象としていた。

著者は一般の有限オートマトンを対象として代数論的研究を行い，両群の分解性や相互関係を解明し，従来えられている結果を包含し，さらに新しい結果を与える一般的理論を構成した。本論文はその成果をまとめたもので全編6章よりなる。

第1章は，序論であって本研究の目的と概要を述べたものである。

第2章では，本論文で重要な役割を果すいくつかの概念を導入している。すなわち，オートマトンの自己同型群Gに関連して，状態集合Q上の同値関係πeと，πeから導かれるGの正規部分群 G_i を合理的に定義している。同じ方法で，入力群Tに関連して，同値関係π_s とTの正規部分群 T_iを定義している。

第3章では，G_iとT_iの分解に関する重要な結果を与えている。すなわちG_iはπe の同値類Q_i^e 上の正則置換群 G_i の部分直積に分解され，同じように G_iはπsの同値類Q_i^e 上の正則置換群 T_i の部分直積に分解されることを証明している。これはGとTの性質を分解の因子G_iとT_iによって調べうることを示す重要な成果である。

第4章では，オートマトンの状態集合の濃度と群の位数の関係を論じ，Q_i^eの濃度はG_i の位数の整数倍，Q_i^sの濃度は T_i の位数の整数倍となるなどの結果を与えている。

第5章では，自己同型写像群と入力群の関係について述べ，Gの構造を T_i の分解に関係づけ，同じようにTの構造を G_i の分解に関係づけている。この結果は緻密な解析によりオートマトンの構造論的性質の解明にすぐれた知見を加えたものである。なおこれまで述べた結果が自己同型写像群と入力群について双対な関係にあることは注目に値する。

第6章では，本論文でえられた結果を特殊なクラスのオートマトンに適用して，従来えられていた結果と新たに加えられた結果を系統的に述べている。以上要するに，本論文は有限オートマトンの構造について代数論的研究を行い，従来の研究結果を包含し，さらに新しい結果を与える一般的な理論を構成したものであって，情報工学の発展に寄与するところが少なくない。

よって，本論文は工学博士の学位論文として合格と認める。