氏　　　　名	さとう ただかず **佐藤　忠一**
授　与　学　位	工　学　博　士
学位授与年月日	昭和51年3月25日
学位授与の根拠法規	学位規則第5条第1項
研究科，専攻の名称	東北大学大学院工学研究科 電気及通信工学専攻（博士課程）
学位論文題目	**セル構造オートマトンに関する研究**
指　導　教　官	東北大学教授　本多　波雄
論文審査委員	東北大学教授　本多　波雄　東北大学教授　木村　正行 東北大学教授　野口　正一　東北大学助教授　那須　正和

論　文　内　容　要　旨

1. ま　え　が　き

セル構造オートマトンの研究は，フォン・ノイマン以来，多くの人々によって研究されている。主として全域関数の単射性，全射性など写像を中心に調べられている。リチャードソンは，積位相のコンパクト性とガーデン・オブ・エデンの定理より，全域関数が第1図で示されるような関係が成立することを明らかにした。

$$\begin{array}{ccc} C\text{で単射} & \Longrightarrow & C_F\text{で全射} \\ & & \Downarrow \\ C\text{で全射} & \Longleftrightarrow & C_F\text{で単射} \end{array}$$

第　1　図

本研究では，ヘドルンドによって与えられた距離をn次元に拡張して用い，またセル空間Cに測度を導入して（このことにより，セル空間Cは，位相的にコンパクトな距離空間，測度論的に確立空間となる。）従来の写像を中心としたスタティカルな研究に対して，ダイナミカルな研究（ある様相に同一の全域関数を次々に作用させて得られる様相の列の性質に関する研究）の重要性を考え，その構造を調べ，リチャードリンの結果との関係を明らかにした。

2. 諸 定 義

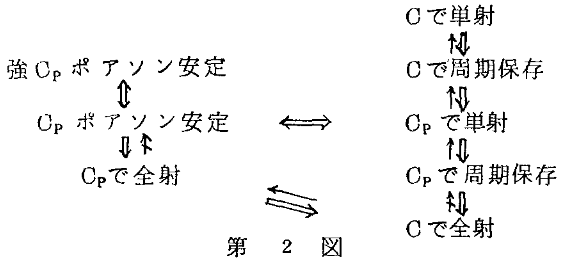
ZおよびNで，それぞれ整数の集合，自然数の集合を表わす。$n \in N$に対して，Z^nの元をセルと呼び，$Q=\{0, 1, \cdots, S-1\}$は各セルが取り得る状態の有限集合である。写像x，$Z^n \to Q$を，様相といい，様相の全体をCで表わす。

Kを非負の整数とする。$x \in C$に対して，$\Gamma_K x$でxの$\{(r_1, \cdots, r_m) \mid |r_j| \leq k,\ 1 \leq i \leq n\}$上での制限を表わす。次のようにして，C上に距離dを導入する。$x, y \in C$に対して，$x=y$ならば$d(x, y)=0$，$x \neq y$ならば，$\Gamma_K x \neq \Gamma_K y$である様な最小の非負の整数kに対して，$d(x, y) = \frac{1}{1+k}$とする。

3. 周期保存の全域関数

定義　$x \in C$とする。xの周期ベクトル$w(x)$を次のように定義する。各シフトσ_i（$1 \leq i \leq n$）に対して，${\sigma_i}^{r_i} x = x$となるような最小の正の数r_iが存在すれば，$w_i(x)=r_i$とし，存在しなければ，$w_i(x)=\infty$とする。$w(x)=(w_1(x), \cdots, w_n(x))$とおく。Cの部分集合$C_P$を$C_P=\{x \in C \mid \sum_{i=1}^{n} w_i(x) < \infty\}$とする。全域関数$\psi$がC（$C_P$）で周期保存であるとは，すべての$x \in C$（$x \in C_P$）に対して，$w(x)=w[\psi(x)]$となることである。また，$x \in C$が$\psi$に関して，（強）ポアソン安定であるとは，（自然数$n_x$が存在して$\psi^{n_x}(x)=x$）非負の整数の列$n_1 < n_2 < \cdots$が存在して$\lim_{i \to \infty} \psi^{n_i}(x)=x$となることがある。$M \leq C$に対して，Mの各点が$\psi$に関して（強）ポアソン安定であるとき，$\psi$は（強）Mポアソン安定であるという。

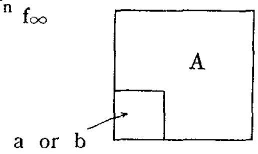
定理　全域関数は第2図に示される関係が成立する。（$\Rightarrow$は，一般次元で成立し，$\rightarrow$は1次元のセル空間で成立する。）



第 2 図

4. C_Fポアソン安定な全域関数

定義　C_Fを有限様相の集合とし，$C_F(\psi)$で全域関数ψの不動点からセルの状態が有限個だけ異なった様相の集合を表わす。局所関数 f に対して，第３図のような任意のパターンAに対して $f(\overline{a}\rceil A)=f(\overline{b}\rceil A)$ ならば $a=b^2$ $(a, b \in Q)$ f はR一性質を持つという。ここで $\overline{a}\rceil A$ は第３図に示されたパターンを表わす。また，局所関数 f に対して，原点を第３図のように左すみにおいたときの全域関数を f_∞と書く。（一般の全域関数ψは$\psi=\sigma_1^{r_1}\cdots\sigma_n^{r_n} f_\infty$と書ける。）



第 3 図

定理　f を局所関数とする。このとき次の各条件は等価である。

(1)　f はR一性質を持つ。

(2)　f_∞ はC_F ポアソン安定である。

(3)　f_∞ は$C_F(f_\infty)$ ポアソン安定である。

系　f，g を局所関数とする。このとき

(1)　f_∞およびg_∞がC_Fポアソン安定ならば，その合成 $f_\infty g_\infty$ も C_F ポアソン安定である。

(2)　f_∞およびg_∞がそれぞれ$C_F(f_\infty)$，$C_F(g_\infty)$ポアソン安定ならば，その合成 $f_\infty g_\infty$ は$C_F(f_\infty g_\infty)$ ポアソン安定である。

定理　f を局所関数とし，f_∞はCで単射であるとする。

(1)　f_∞が C_F ポアソン安定ならば，f_∞^{-1} も C_F ポアソン安定である。

(2)　f_∞ が$C_F(f_\infty)$ポアソン安定ならば f_∞^{-1}も $C_F(f_\infty^{-1})$ ポアソン安定である。

定義　$\psi^{\ell}=I$となるような自然数ℓが存在するとき，全域関数ψは位数有限であるという。

定理　ψを全域関数とする。このとき次の各条件はすべて等価である。

(1)　ψ は位数有限である。

(2)　ψ はC_P で位数有限である。

(3)　ψ はC_F で位数有限である。

(4)　ψ は$C_F(\psi)$で位数有限である。

(5)　ψ は強Cポアソン安定である。

定理　ψを全域関数とする。位数有限，強$C_F(\psi)$ポアソン安定，$C_F(\psi)$ポアソン安定，強C_Fポアソン安定，C_F ポアソン安定の各クラスは，次の性質(1)，(2)を持つ。

(1)　各クラスとも合成に関して閉じていない。

(2)　ψをCで単射である全域関数とする。A_φを全域関数の集合の上の$A_\varphi(\psi)=\varphi\psi\varphi^{-1}$ なるオペレーションとする。このとき，各クラスはA_φのもとで閉じている。

5. 保測的な全域関数

<u>定義</u>　Cの部分集合$\{x \in C \mid x(\overrightarrow{r_1}) = a_1, \cdots, x(\overrightarrow{r_n}) = a_n\}$の測度$\mu$を次のように定める。($\overrightarrow{r_i} \in Z^n$, $a_i \in Q$)，$\mu[\{x \in c \mid x(\overrightarrow{r_1}) = a_1, \cdots, x(\overrightarrow{r_n}) = a_n\}] = \frac{1}{S^n}$ ($|Q| = S$)の測度の入れ方より，Cは，確率空間となる。上で与えられたCの部分集合によって生成される完全加法族を$\mathfrak{F}$とする。全域関数ψが保測的であるとは，すべての$A \in \mathfrak{F}$に対して，$\psi^{-1}(A) \in \mathfrak{F}$かつ$M(A) = \mu[\psi^{-1}(A)]$となることである。

<u>定義</u>　ψを全域関数とする。$x \in C$に対して，xがψに関して正(負)の方向に非遊走点であるとは，任意の$\varepsilon > 0$および任意の$\tau \in N$に対してある$t > \tau$なる$t \in N$が存在して$U(x, \varepsilon) \cap \psi^t(U(x, \varepsilon)) \neq \phi$ ($U(x, \varepsilon) \cap \psi^{-t}(U(x, \varepsilon)) \neq \phi$) となることである。$M \leq C$とする。$\psi$がMで正(負)の方向に非遊走的であるとは，Mの各元がψに関して非遊走点となることである。

<u>定理</u>　ψを全域関数とする。このとき次の各条件はすべて等価である。

(1)　ψはCで全射である。

(2)　ψは$C_F(\psi)$で単射である。

(3)　ψは保測変換である。

(4)　ψはCで負の方向に非遊走的である。

(5)　ψはCで正の方向に非遊走的である。

(6)　MをCで稠密な部分集合とする。このときψはMで負の方向に非遊走的である。

(7)　MをCで稠密な部分集合とする。このときψはMで正の方向に非遊走的である。

(8)　ψに関してポアソン安定な様相の集合は，Cで稠密である。

<u>定義</u>　fを局所関数とする。fの定義域を各i軸($1 \leq i \leq n$)に対してすべて反転して得られる局所関数がR－性質を持つとき，fはL－性質を持つという。

<u>定理</u>　fがL－性質を持つときf_∞は混合的である。

6. 単射である全域関数の分布

この章でシアーズの結果がn次元においても成立することを示す。

<u>定義</u>　A，E，E_Fで，それぞれCで単射である全域関数の集合，Cで全射である全域関数の集合，C_Fで全射である全域関数の集合を表わす。

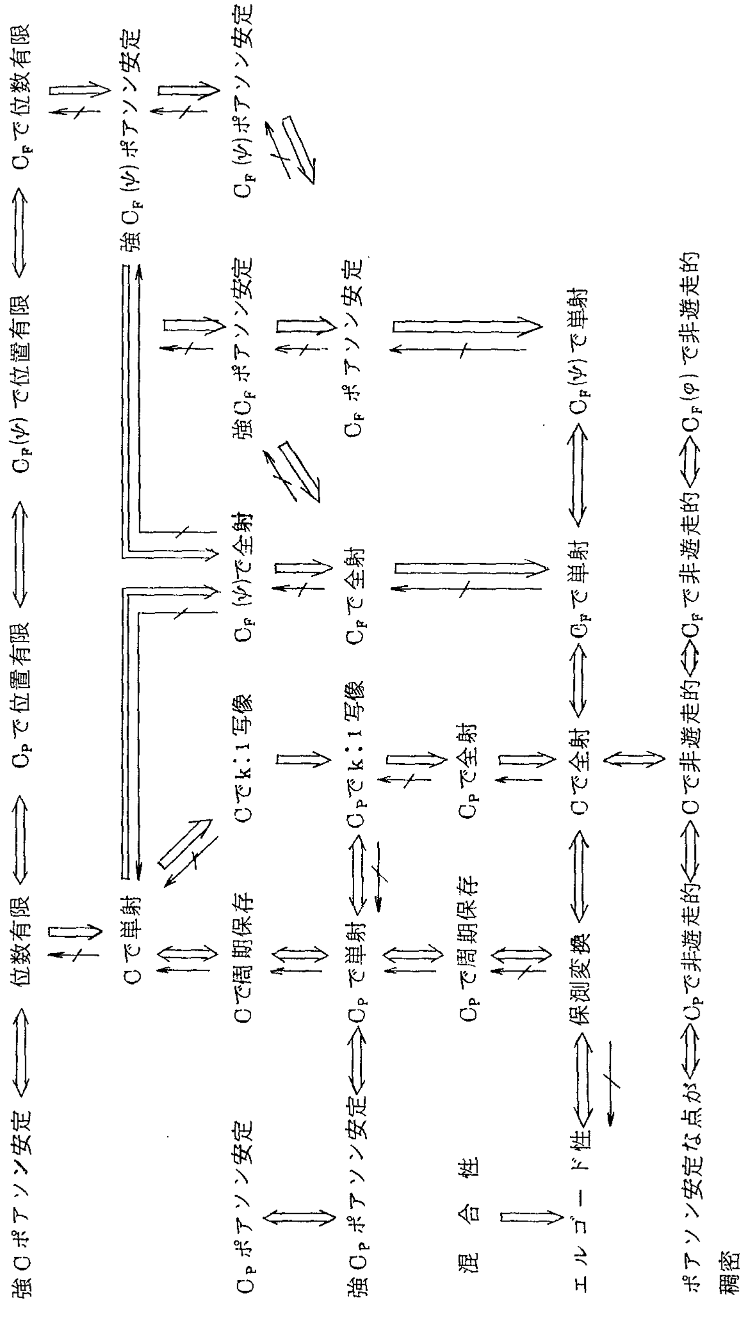
<u>定理</u>　AはEの中でポイント・ワイズ位相のもとで全疎集合である。

<u>定理</u>　1次元においては，E_FはEの中でポイント・ワイズ位相のもとで全疎集合である。

<u>系</u>　1次元においては，強C_Fポアソン安定な全域関数の集合はEの中でポイント・ワイズ位相のもとで全疎集合である。

あ と が き

セル構造オートマトンの全域関数のダイナミカルな性質を調べ，リチャードソンの結果をさらに詳細に論じた。（第 4 図を参照）



第 4 図

参考文献

1. D.Richardson, "Tessellations with local transformations," J.Comp. System, Sci 5 1972
2. G.A.Hedlund, "Endomorphisms and Automorphisms of the shift dynamical system," Math.Systems Theory vol 3 1969
3. M.Sears "The Automorphisms of the shift dynamical system are relatively sparse," Math.Systems theory vol5 1971

審査結果の要旨

セル構造オートマトンは無限空間内に同一の有限オートマトン（セル）を規則的に配列し，一様に結線した系であって，並列演算システムや神経回路のモデルとして近年さかんに研究されている。セル構造オートマトンでは，各セルの状態はその近傍の有限個のセル状態に依存する局所関数にしたがって時間的に変化し，このことがすべてのセルについて並列に行われて全体の様相が変化する。この変化を記述するものが全域関数であり，その性質の解明はセル構造オートマンのもっとも基本的な問題である。しかし，従来の研究の対象は関数としての単射性，全射性などの静的な性質の範囲にとどまっていた。著者は様相の時間的経過に着目する研究の重要性を認識し，ポワッソン安定性，位数有限性などの動的な性質を記述する概念を定義し，また測度論や位相数学の手法を導入してそれらの諸性質を解明した。本論文はその成果をまとめたもので全編7章よりなる。

第1章は，序論で本研究の目的を述べたものである。

第2章は，論文で用いられる術語と概念の定義および位相空間の結果を要約したものである。

第3章では，周期様相の集合上での全域関数の性質を調べ，単射性，全射性，周期保存性の間の関係を明らかにしている。また動的な性質であるポワッソン安定性を定義し，周期様相ではポワッソン安定性と単射性が等価となることを示している。

第4章では，ポワッソン安定な全域関数の性質をくわしく調べ，局所関数の性質との関係，合成関数や逆関数の性質などを解明している。さらに，より強い性質である強ポワッソン安定性，位数有限性などの概念を定義し，それらの性質の間の等価性を示している。上記二つの章の結果は，全域関数の種々の動的性質や静的性質の関係を解明したものですぐれた知見である。

第5章では，測度論の手法を用いて全域関数の動的な性質を調べ，保測性とエルゴード性について論じている。この結果はセル構造オートマトンの研究に力学系理論の概念や手法をはじめて導入し成果をあげたもので，その意義はきわめて大きい。

第6章では，位相的手法を用いて単射な全域関数の分布を調べ，それが疎に分布することを示している。

第7章では，全域関数の種々のクラスについて，その例と反例をあげて，クラス間の関係を論じている。

以上要するに，本論文は並列演算や神経回路のモデルであるセル構造オートマトンについて，新しい概念を導入し，またすぐれた数学的手法を駆使して，その動的性質を解明したものであって，情報工学の発展に寄与するところが少なくない。

よって，本論文は工学博士の学位論文として合格と認める。