氏　　　　名	大日方（おびなた）　五郎（ごろう）
授与学位	工学博士
学位授与年月日	昭和52年3月25日
学位授与の根拠法規	学位規則第5条第1項
研究科，専攻の名称	東北大学大学院工学研究科 （博士課程）機械工学専攻
学位論文題目	**線形系における低次モデル近似とその応用に関する研究**
指導教官	東北大学教授　畑中　浩
論文審査委員	東北大学教授　畑中　浩　東北大学教授　斎藤　秀雄 東北大学教授　箱守京次郎　東北大学助教授　猪岡　光

論 文 内 容 要 旨

第1章　緒　　言

制御工学の対象とする実際のシステムは，それを同定しようとする際，その動特性を表わすデータが十分に得られないとか，厳密な表現が得られたとしても複雑すぎて，そのままでは解析，設計が困難であるようなものが多い。したがって，制御理論を実際の問題へ適用するときには同定，解析，設計の各段階で，近似の手法が活用されなければならない。本論文では，対象とするシステムが線形定係数系である場合に，それが正しく同定されてその状態方程式が与えられたとし，それをより次数の低い簡単な線形定係数系で近似する問題を取り扱う。この次数の低い線形定係数系を低次モデルと呼ぶ。低次モデルを構成する問題を一般的に論ずることは，以下に述べる理由により重要なことと考えられる。第一に，低次モデルを用いることにより解析，設計の際の定性的な見通しを得ることができる。また計算量の低減化をはかることができる。第二に，より次数

の低い空間上で考えるため，低次モデルをもとに導いた制御法則を物理的に実現したコントローラは簡単で安価なものになる。第三に，同定段階の近似問題に対しどの程度簡単化できるかという情報を与える。

第 2 章　低次モデルの分類とその応用

実際の制御問題は多様であるから，低次モデルを構成する方法は多様である方が望ましい。また，その様々の方法の関係が明らかにされれば，応用の際に便利である。今までに提案された低次モデルは，システムの固有値，出力誤差，方程式誤差，インパルス応答のモーメントのどれに着目して構成するかにより大きく 4 つの方法に分類される。またそれぞれの方法でも，個々の入力に依存して構成するかどうかにより 2 つの方法に分類される。

低次モデルを構成する方法を研究する他に，低次モデルを他の制御問題へ応用することは，低次モデルの意味から考えて重要なことと考えられる。今まで，低次モデルは一部の最適制御問題，極配置問題等へ応用されている。

第 3 章　状態変数の集約化法と方程式誤差

対象とするシステムの状態方程式が次式のように与えられるとする。

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad (1)$$

ここに，状態ベクトル x の次元 n，入力ベクトル u の次元は r とし，行列A，B は適当な大きさをもつものとする。このシステムに対し，低次モデル

$$\dot{\bar{x}} = F\bar{x} + Gu \qquad (2)$$

を考える。$\bar{x}$ は ℓ 次元の状態ベクトルであり，$\ell < n$ であるとする。状態変数の集約化法による低次モデルにおいては，ある $\ell \times n$ 行列L により，

$$\bar{x} = Lx \qquad (3)$$

なる関係が成立する。この低次モデルは，$\bar{x}$ のかわりに Lx を(2)式に代入したときの方程式誤差をゼロにするようにパラメータを決めたものと解釈することができる。この低次モデルは(3)式が成立するため，多くの利点を持つが，ペア（A，L）が可観測となるような行列L に対しては低次モデルを求めることはできない。したがって，元のシステムの出力ベクトルが，

$$y = Cx \qquad (4)$$

と与えられるとき，ペア（A，C）が可観測であるなら，この方法により出力の近似を直接得ることはできない。この困難は低次モデルの出力方程式を考慮し，出力誤差を最小にするように低次モデルの出力方程式のパラメータを決めることにより解消することができる。

第4章　方程式誤差最小法による低次モデル

元のシステムの出力と低次モデルの出力の誤差を評価にとり，それを最小にするように低次モデルのパラメータを決定する方法は，数多く提案されているが，パラメータの計算が困難であることが欠点である。これに対し第3章で述べた方程式誤差を評価にとり，それがゼロとならないときに，できるだけ小さくなるように低次モデルのパラメータを決定する方法を採用すれば，パラメータの計算は極めて簡単となる。今，低次モデルの次数が元のシステムの出力の次元に等しいとき，方程式誤差 d を次のように定義する。

$$d = (CA + FC)x + (CB + G)u \qquad (5)$$

これは，出力誤差 e と次の微分方程式で関係づけられる。

$$\dot{e} = Fe + d \qquad (6)$$

d が制御区間で，十分に小さいとき，e も小さくなることが期待できる。この方程式誤差を，次の関数で評価する。

$$J = \int_0^T d'Qd\,dt \qquad (7)$$

この章で扱う問題は，この J を最小にする低次モデル(2)式のパラメータ F，G を決定する問題と定式化される。J には，低次モデルの状態ベクトル $\bar{x}$ は含まれず，求めるべきパラメータが陽に含まれているため，最小化の必要条件が次のように容易に求められる。

$$[F \vdots G]\begin{bmatrix} CW_xC' & CW_{xu} \\ W'_{xu}C' & W_u \end{bmatrix} = C[A \vdots B]\begin{bmatrix} W_xC' & W_{xu} \\ W'_{xu}C' & W_u \end{bmatrix} \qquad (8)$$

ここに，$W_x = \int_0^T xx'\,dt$，$W_{xu} = \int_0^T xu'\,dt$，$W_u = \int_0^T uu'\,dt$ と定義される。(8)式は，未知パラメータに関し線形な方程式であるから，解の存在性は明確であるし計算も容易である。以上の取り扱いは複数個の入力がある場合にも，次のようにして容易に拡張できる。すなわち評価として(7)式 J の代りに，

$$J^+ = \frac{1}{\ell}\sum_{i=1}^{l}\int_0^T d'_iQd_i\,dt \qquad (9)$$

のように，各入力に対する方程式誤差 d_i を平均化するような関数を用いればよい。また，入力が統計的信号である場合には

$$J^S = E\{d'Qd\} \qquad (10)$$

を用いることにより同様の解を得ることができる。入力が r 個の単位インパルスである場合に，J^+ を最小にする低次モデルのパラメータを求めると，

$$F = CAW_AC'(CW_AC')^{-1} \qquad (11)$$

$$G = CB \qquad (12)$$

となる。ここに W_A は次式で定義される。

$$W_A = \int_0^T \exp(At)BB'\exp(A't)dt \qquad (13)$$

入力が r 個の単位ステップ関数である場合も同様に計算できる。いくらかの数値例で，これらの低次モデルを他の方法による低次モデルと出力誤差の２乗積分値を評価として比較した結果は良好であった。これらの低次モデルは応用上有用ないくつかの特徴をもつ。まとめると次のようになる。

(1) 低次モデルの状態変数が，元のシステムの出力の近似になる。

(2) 低次モデルのパラメータは，線形な行列方程式を解くことにより求められ，他の方法と比較して簡単である。

(3) 元のシステムが安定であるなら，低次モデルも安定である。

(4) 低次モデルの出力は，元のシステムの出力と同じエネルギーをもつ。

(5) 低次モデルの可制御性が保障される。

第５章　低次モデルを用いた極配置

低次モデルが元のシステムの情報のある部分を落としてしまっている以上，すべての制御問題にマッチした低次モデルというものは存在し得ない。その意味で数多くの方法が提案され，様々な制御問題に低次モデルが用いられている。ここでは，制御問題の中でも基本的である静的なフィードバックによる極配置問題をとり上げ，低次モデルを用いて検討する。線形系の極配置問題には，状態ベクトルフィードバックによるものと出力フィードバックによるものがある。状態ベクトルフィードバックによるものでは，第３章で述べた状態変数の集約化法が応用され，計算量の低減化に成功しているが，同様の方法を出力フィードバックによる極配置問題に適用する努力は実を結んでいない。その点を考慮し，次の形の低次モデルを出力フィードバックによる極配置問題に応用することを考える。

$$\dot{\bar{x}} = CAC^*\bar{x} + CBu \qquad (14)$$

ここに，C^* は行列Cの右逆行列であるが，この重み行列（$C^* = UC'(CUC')^{-1}$ と表わしたときの行列U）は，設計を進める段階で決定される。この重み行列を適当に選べば，第４章で求められた低次モデルのあるものに一致する。低次モデルにおいて状態ベクトルフィードバック

$$u = -K\bar{x} + v \qquad (15)$$

をほどこし，閉ループにおける極 spec $\{CAC^* - CBK\}$ を任意に指定する。このフィードバックゲインを元のシステム（(1)式，(4)式）に出力フィードバック

$$u = -KCx + v \qquad (16)$$

の形で適用する。このときの閉ループにおける極 spec $\{A - BKC\}$ が，低次モデルの極 spec

$\{CAC^* - CBK\}$をすべて含むような構成法を考える。このための十分条件は，次の3つの条件を満足する行列Dが存在することである。

(1) 出力の次元をmとする。(n−m)×n行列Dの行ベクトルはすべてCの行ベクトルと一次独立である。

(2) $\mathrm{rank}\{DB\} = \mathrm{rank}\{[DB : DAC^*]\}$

(3) ペア（CAC^*, $CB(Ir - (DB)^- DB)$）は可制御である。

ここに，$(\ )^-$は一般逆行列を表わす。元のシステムのトリプル（A，B，C）の性質を調べることにより，これらの条件が満足されるかどうかが容易に判定される。(1)〜(3)の条件が満足されるとき，フィードバックゲインとして，

$$K = (DB)^- DAC^* + (Ir - (DB)^- DB) K_2 \qquad (17)$$

の形のものを用いれば，元のシステムの極は低次モデルの極と$\mathrm{spec}\{DAD^*\}$の和集合となる。この$\mathrm{spec}\{DAD^*\}$の値も任意に指定することができる。以上の構成法の特徴をまとめると次のようになる。

(1) 元のシステムの極をすべて，この方法により指定する場合，2段階の手続きで設計が進められる。第1の段階は，線形な行列方程式を解くことに帰着される。第2の段階では，低次モデルでの状態ベクトルフィードバックの計算になる。この段階では従来の方法が利用できる。全体として計算は容易である。

(2) この方法を適用した結果の閉ループにおける元のシステムと低次モデルの出力誤差を評価する式は簡単な形となる。したがって，元のシステムと低次モデルが閉ループにおいて近似の関係になるための条件を容易に知ることができる。

第6章　結　　言

低次モデルを構成する方法は，本論文の方法も含め，大体の方法が提案されたと思われる。今後，制御問題別にどの低次モデルが適しているかという選択がなされていく必要があると考えられる。また本論文では，低次モデルを極配置問題へ応用することを試みたが，極配置問題以外の制御問題に低次モデルを応用する研究は，まだまだ十分に行なわれていず，今後の研究に期待される所が大きい。低次モデルの応用が，各制御問題別に十分検討され，そしてそれらの間の関係が明確になれば，状態方程式を用いる制御理論が，実際の問題へ適用され成果を上げることができるものと考える。

審査結果の要旨

制御の対象となる実際のシステムは一般には極めて複雑で，その次数すなわちその動特性を支配する状態変数の数も極めて大きいことが多い。このため，たとえ制御対象の動特性が正確に知られていたとしても複雑すぎて，そのままでは制御系の設計が困難であることが多い。したがって，制御系の設計にあたっては，許容される精度内において近似の手法を取り入れる必要性があると考えられる。本論文は，このような観点から，高次線形定係数系を低次モデルすなわち，より次数の低い線形定係数系で近似する方法を提案するとともに，制御系の設計に応用してその有用なことを立証したもので，全編6章よりなる。

第1章は緒言である。

第2章では今まで提案された低次モデルを検討し，低次モデルを構成する方法の分類を行っている。

第3章では状態変数の集約化法について検討を行い，集約化法により元のシステムの固有値のうち，支配的な固有値を残して低次モデルを構成するとともに，出力に対する誤差が最小になるように低次モデルの出力方程式の定数を定める方法を提案し，数値計算によりその有用性を示している。

第4章では低次モデルを構成する方程式誤差最小法を提案している。これは，元のシステムが可観測な場合には，その出力ベクトルは状態変数にはなり得ないので，その値を低次モデルの状態方程式に代入した場合の誤差が最小になるように低次モデルを構成するもので，数値計算によりその方法の妥当性を明らかにしている。

第5章では，低次モデルにおける状態ベクトルフィードバックによりその閉ループ系の固有値を希望の値に指定し，さらにそのフィードバックゲインを元のシステムの出力フィードバックに適用することにより，極めて一般的な条件の下に元のシステムの閉ループ系の固有値が，低次モデルの指定された固有値をすべて含むことを明らかにしている。これは重要な知見である。

第6章は結言である。

以上要するに本論文は，線形定係数系の低次モデルを構成する方法を提案し，これにより出力フィードバック制御系の固有値指定問題に一つの解法を与えたもので，制御工学の発展に寄与するところが少なくない。

よって，本論文は工学博士の学位論文として合格と認める。