氏　　　　　名	浅野孝夫（あさの たかお）
授与学位	工学博士
学位授与年月日	昭和52年3月25日
学位授与の根拠法規	学位規則第5条第1項
研究科，専攻の名称	東北大学大学院工学研究科 （博士課程）電気及通信工学専攻
学位論文題目	**組合せ問題の計算の複雑さに関する研究**
指導教官	東北大学教授　斎藤　伸自
論文審査委員	東北大学教授　斎藤　伸自　東北大学教授　木村　正行 東北大学教授　野口　正一　東北大学助教授　西関　隆夫

論文内容要旨

第1章　序　　論

1971年，S.A.Cookが「NP一完全」なる概念を導入して以来，組合せ問題の計算の複雑さに関する研究は，ますます活発になってきた。しかしながら，NP一完全問題を解く多項式オーダの手数をもつアルゴリズムがあるのかないのか未解決であるなど，現在のところ，NP一完全性は十分に解明されたとはいい難く，その解明が望まれている。

本論文では，NP一完全性の理解を深めるために，実用上しばしば起こる最小二部グラフ化問題を取り上げ，まず，そのマトロイド構造上の性質を検討し，その結果を用いて，その問題の計算の複雑さを解明する。次に，NP一完全であることが既知である最大閉路問題とマトロイドの意味で双対な，最大カットセット問題の計算の複雑さを明らかにする。更に，ムーア型機械の最短な検査系列を求める問題は，NP一完全であることが既に知られていたが，p一状態r一入力

強連結順序機械の族における最短な検査系列の長さの上限については議論されていなかったので，本論文では，その上限を簡潔な形で与える。

第2章　基本的概念の定義

P（NP）を（非）決定性アルゴリズムで多項式オーダの手数で解ける問題の族とする。問題 P_o が $P_o \in NP$ であり，かつ任意の問題 $P \in NP$ が P_o に変換可能であるならば，P_o は NP 一完全であると定義する。グラフ $G=(V, E)$ において，$E_o \cap E_s = \phi$ であるとき，E_o の枝を開放除去し，更に E_s の枝を短絡除去して得られるグラフを $G[E_o, E_s]$ と書く。

第3章　極大偶マトロイドについて

多項式オーダの手数をもつアルゴリズムで解ける組合せ・グラフ問題の多くは，マトロイド構造と密接な関係があることが知られている。このことから，与えられた組合せ・グラフ問題のマトロイド構造上の性質を把握しておくことは，その問題の計算の複雑さを研究するのに必要であろう。

本章では，二部マトロイド及びEuler マトロイドを総称する「偶マトロイド」なるものを定義し，その性質を検討する。

有限集合Eと，閉路と呼ばれるEの非空な部分集合の族 m からなるマトロイドを $\mathbb{M}=(m, E)$，で表わす。m のどの閉路の元数も偶数であるとき，$\mathbb{M}$ は偶であると定義する。$E_1=E-E_o$ かつ $m_1=\{C_1 \mid C_1 \in m,\ C_1 \cap E_o=\phi\}$ であるとき，$\mathbb{M}_1=(m_1, E_1)$ を $\mathbb{M}$ から E_o を除去して得られる部分マトロイドといい，$\mathbb{M}[E_o, \phi]$ で表わす。$L=\{C-E_s \mid C \in m,\ C-E_s \neq \phi\}$ としたとき，$E_1=E-E_s$ かつ $m_1=\{C \in L \mid C$ は L で極小$\}$ であるならば，$\mathbb{M}_1=(m_1, E_1)$ を $\mathbb{M}$ から E_s を除去して得られる縮約マトロイドといい，$\mathbb{M}[\phi, E_s]$ で表わす。$E_o \cap E_s=\phi$ のとき，$\mathbb{M}_1=\mathbb{M}[E_o, \phi]$ かつ $\mathbb{M}_2=\mathbb{M}_1[\phi, E_s]$ であるならば，$\mathbb{M}_2$ を $\mathbb{M}$ から E_o 及び E_s を除去して得られる縮約部分マトロイドといい，$\mathbb{M}[E_o, E_s]$ で表わす。$\mathbb{M}$ がバイナリマトロイドならば，以下の定理がいえる。

〔定理 3.1〕 $\mathbb{M}=(m, E)$ がバイナリマトロイドのとき，次の(a)，(b)及び(c)は等価である。

(a)　E_d は部分マトロイド $\mathbb{M}[E_d, \phi]$ が偶であるような，Eの極小な部分集合である。

(b)　E_d は縮約マトロイド $\mathbb{M}[\phi, E_d]$ が偶であるような，Eの極小な部分集合である。

(c)　$E_d=E_o+E_s$ は，縮約部分マトロイド $\mathbb{M}[E_o, E_s]$ が偶であるような，Eの極小な部分集合である。　　　　（定理終）

上の定理は，与えられたバイナリマトロイドから，極大な偶部分マトロイド，偶縮約マトロイド及び偶縮約部分マトロイドを求めることは互いに等価であることを示している。グラフに関し

ては，次の系が得られる。

〔系 3.1〕グラフ$G=(V, E)$において，次の(a), (b)及び(c)は等価である。

(a) E_dは$G〔E_d, \phi〕$（$G〔\phi, E_d〕$）が二部グラフ（Eulerグラフ）であるような，Eの極小な部分集合である。

(b) E_dは$G〔\phi, E_d〕$（$G〔E_d, \phi〕$）が二部グラフ（Eulerグラフ）であるような，Eの極小な部分集合である。

(c) $E_d=E_o+E_s$は，$G〔E_o, E_s〕$（$G〔E_s, E_o〕$）が二部グラフ（Eulerグラフ）であるような，Eの極小な部分集合である。　（系終）

次に，最大な偶部分（偶縮約）マトロイドを特徴付ける2つの定理を与える。$D_{red}(\mathbb{M})$（$D_{cont}(\mathbb{M})$, $D_{min}(\mathbb{M})$）$\equiv\{E_d \mid E_d$は$\mathbb{M}〔E_d, \phi〕$（$\mathbb{M}〔\phi, E_d〕$, $\mathbb{M}〔E_o, E_s〕$（$E_d=E_o+E_s$））が偶であるような，Eの最小な部分集合$\}$と定義する。$B(\mathbb{M})$は$\mathbb{M}$のすべての基の集合であるとする。$\mathbb{M}$の基B及びeに関する基本閉路の元数が奇数ならば，$e\in\overline{B}$は奇であると定義する。$\overline{B}_{od}\equiv\{e\in\overline{B} \mid e$は奇$\}$とすると次の定理がいえる。

〔定理 3.2〕$\mathbb{M}$がバイナリマトロイドであるとき，

$$D_{red}(\mathbb{M})=D_{red}(\mathbb{M})=D_{cont}(\mathbb{M})=D_{min}(\mathbb{M})$$
$$=\{B_{od} \mid B\in B(\mathbb{M})\text{ のうちで }|B_{od}|\text{ が最小}\}$$

がなりたつ。　（定理終）

定理 3.2により，$D_{red}(\mathbb{M})$, $D_{cont}(\mathbb{M})$及び$D_{min}(\mathbb{M})$を代表して$D(\mathbb{M})$とかけば次の定理がいえる。

〔定理 3.3〕$\mathbb{M}$はバイナリマトロイドであるとする。次の(a), (b)及び(c)のいずれの場合にも，$E_d\in D(\mathbb{M})$であるための必要十分条件は，$\mathbb{M}$の任意の共閉路Sに対して，$|S\cap E_d|\leq|S-E_d|$が成り立つことである。

(a) E_dは$\mathbb{M}〔\phi, E_d〕$が偶であるようなEの部分集合である。

(b) E_dは$\mathbb{M}〔E_d, \phi〕$が偶であるようなEの極小な部分集合である。

(c) $E_d=E_o+E_s$は，$\mathbb{M}〔E_o, E_s〕$が偶であるようなEの極小な部分集合である。

（定理終）

第4章　最小二部グラフ化問題の計算の複雑さ

グラフ$G=(V, E)$において，GからV_1の点を除去し，E_oの枝を開放除去し，更にE_sの枝を短縮除去して得られるグラフを$(G-V_o)〔E_o, E_s〕$とかく。GからV_1の点を除去し，E_oの枝を開放除去し，更にE_sの枝を短絡・ループ除去（短絡してループが生じた場合そのループ

をすべて取り去ること）して得られるグラフを（G－Vo）〘Eo, Es〙とかく。

本章では，第3章の結果を用いて，以下の種々の最小二部グラフ化問題の計算の複雑さを検討する。

表 4. 1　種々の最小二部グラフ化問題

問　題	入　力	満足すべき性質	存在性を判定すべき部分集合
P_1	G, k	$\|Ed \leq k$, G〔Ed, ϕ〕が二部グラフ	Ed (⊂E)
P_2 (P_2')		$\|E\| \leq k$, G〔ϕ, Ed〕(G〘ϕ, Ed〙) が二部グラフ	
P_3 (P_3')		Ed＝Eo＋Es, $\|Ed\| \leq k$, G〔Eo, Es〕(G〘Eo, Es〙)が二部グラフ	
P_4 (P_4')	G, k_1, k_2	$\|E\| \leq k_1$, $\|Es\| \leq k_2$, G〔Eo, Es〕(G〘Eo, Es〙)が二部グラフ	Eo, Es (⊂E)
P_5	G, k	$\|Vo\| \leq k$, G－Vo が二部グラフ	Vo (⊂V)
P_6		$\|Vo+Ed\| \leq k$, (G－Vo)〔Ed, ϕ〕が二部グラフ	Vo (⊂V) Ed (⊂E)
P_7 (P_7')		$\|Vo+Ed\| \leq k$, (G－Vo)〔ϕ, Ed〕((G－Vo)〘ϕ, Ed〙)が二部グラフ	
P_8 (P_8')		Ed＝Eo＋Es, $\|Vo+Ed\| \leq k$, (G－Vo)〔Eo, Es〕((G－Vo)〘Eo, Es〙が二部グラフ	
P_9	G, k_1, k_2	$\|Vo\| \leq k_1$, $\|Ed\| \leq k$, (G－Vo)〔Ed, ϕ〕が二部グラフ	
P_{10} (P_{10}')		$\|Vo\| \leq k_1$, $\|Ed\| \leq k_2$, (G－Vo)〔ϕ, Ed〕((G－Vo)〘ϕ, Ed〙)が二部グラフ	
P_{11} (P_{11}')		Ed＝Eo＋Es, $\|Vo\| \leq k_1$, $\|Ed\| \leq k_2$, (G－Vo)〔Eo, Es〕((G－Vo)〘Eo, Es〙)が二部グラフ	
P_{12} (P_{12}')	G, k_1, k_2, k_3	$\|Vo\| \leq k_2$, $\|Eo\| \leq k_2$, $\|Es\| \leq k_3$, (G－Vo)〔Eo, Es〕((G－Vo)〘Eo, Es〙)が二部グラフ	Vo (⊂V) Eo, Es (⊂E)

P_1及びP_5がＮＰ－完全であることと系 3. 1 により，次の定理が得られる。

〔定理 4. 1〕 Pi ($2 \leq i \leq 12$, $i \neq 5$) 及びP_j' ($2 \leq j \leq 12$, $j \neq 5, 6, 9$) はいずれもＮＰ－完全である。　　　　（定理終）

偶マトロイドに関する議論をk部グラフに一般化すると次の定理が得られる。

〔定理 4.2〕 グラフG＝（V，E）において，次の(a)，(b)及び(c)は等価である。

(a) Ed はG〔Ed，φ〕がk部グラフであるようなEの極小な部分集合である。

(b) Ed はG〔φ，Ed〕がk部グラフであるようなEの極小な部分集合である。

(c) Ed＝Eo＋Es はG〔Eo，Es〕がk部グラフであるようなEの極小な部分集合である。

（定理終）

k彩色可能グラフ問題（与えられたグラフがk色で色分けできるか否かを判定する問題)はk＝3でNP一完全であることが既に知られていたが，これを用いて次の定理がいえる。

〔定理 4.3〕 k≧4のとき，k彩色可能グラフ問題はNP一完全である。　（定理終）

第5章　最大カットセット問題の計算の複雑さ

互いに素な閉路の最大な和集合を求める問題と，互いに素なカットセットの最大な和集合を求める問題は，マトロイドの意味で双対であるが，後者がNP一完全であるのに対し，前者は多項式オーダの手数をもつアルゴリズムで解けることが既に示されている。

本章では，NP一完全であることが既に知られている最大閉路問題に双対な問題である，最大カットセット問題（グラフの最大なカットセットを求める問題)の計算の複雑さについて検討する。

高々2個のリテラルの和で表わされる命題の集合 { $C_i = a_i \vee b_i$ }が与えられたとき，同時に真にすることができる命題の最大数を決定する問題をSAT 2とする。SAT 2がNP完全であることは既に知られているので，SAT 2が最大カットセット問題に変換可能であることを示して，次の定理がいえる。

〔定理 5.1〕 最大カットセット問題はNP一完全である。　（定理終）

第6章　順序機械の故障検査系列の長さについて

順序機械の故障診断問題の従来の研究は，与えられた順序機械より短い検査系列をいかに能率よく求めるかについてなされている。この問題は，ムーア型機械の場合には，グラフの traveling salesman problem に等価であり，ミーリ型機械の場合には，Chinese postman's problem に等価である。したがって，前者の場合には，NP一完全であり，後者の場合には，多項式オーダの手数をもつアルゴリズムで解けることが知られている。

本章では，p一状態r一入力強連結順序機械の族における，最短検査系列の長さの上限を簡潔な形で与える。

ムーア型機械M（ミーリ型機械Me）をある初期状態から出発させ，すべての状態（遷移枝）を少なくとも1回通らせ，再び初期状態に戻らせる入力系列で最短なものを，その機械の（A一）

ツアーと呼び，その長さをℓ_T（M）（ℓ_{AT}（Me））とかく。p－状態r－入力強連結ムーア（ミーリ）型機械の族をm_p^r（L_p^r）とする。m_p^r（L_p^r）における（A－）ツアーの長さの上限を$\ell_T(m_p^r) = \max\{\ell_T(M) | M \in m_p^r\}$（$\ell_{AT}(L_p^r) = \max\{\ell_{AT}(Me) | Me \in L_p^r\}$）とする。$0 \leq k < x \leq k+1$（kは整数）ならば$\{x\} = k+1$とし，$x \leq 0$ならば$\{x\} = 0$とする。このとき，次の定理がいえる。

〔定理 6. 1〕 $p = s(2r-1) + t \ (0 \leq t \leq 2r-2)$であるとき，$n = s(2r-1) + 1 + \{\frac{t-2}{2}\}$とすれば，

$$\ell_{AT}(L_p^r) = g(p, r) = \frac{1}{2}p(p+1)(r-1) + p$$

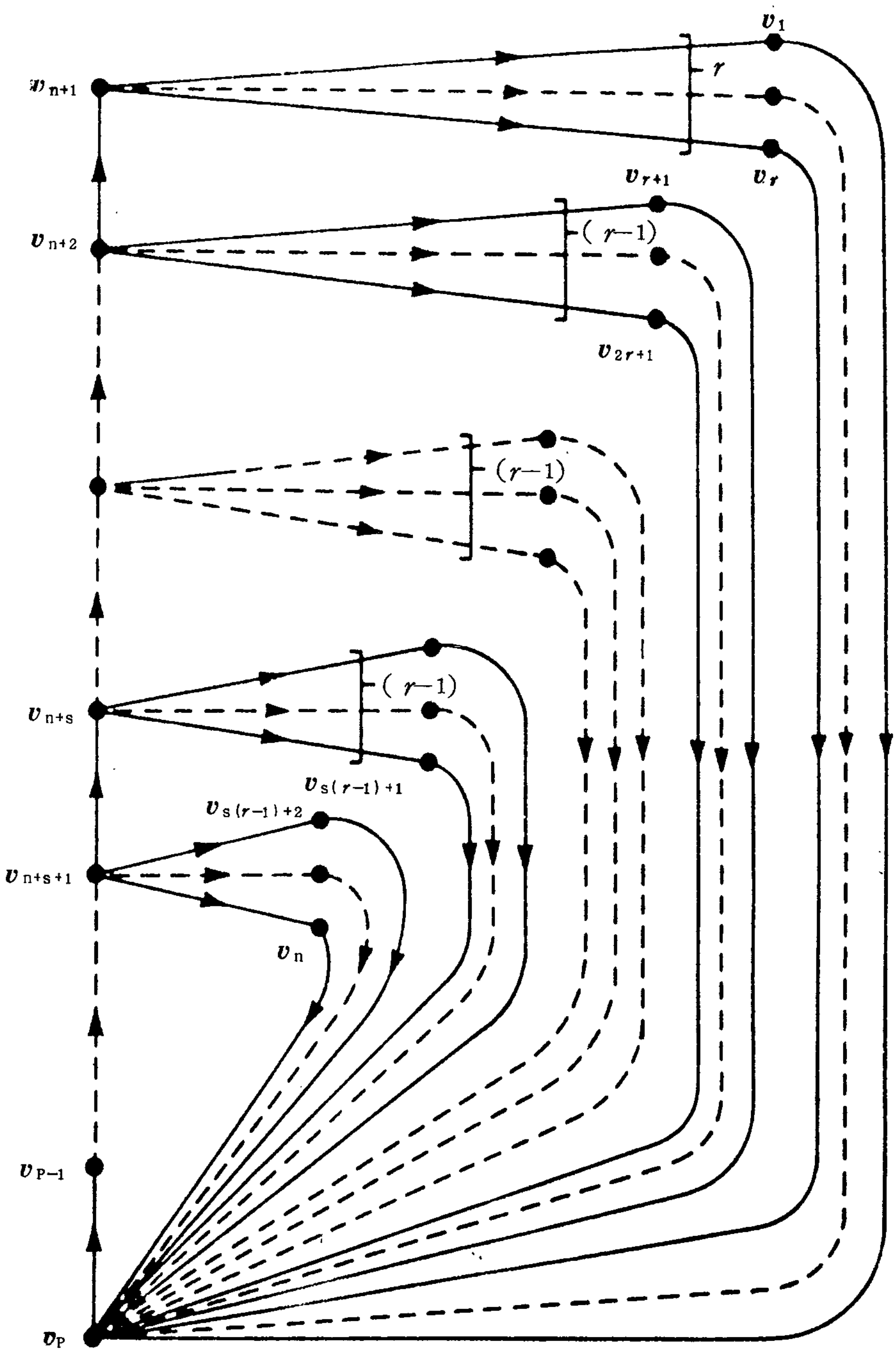
$$\ell_T(m_p^r) = h(p, r) = pn + n - n^2 + \frac{1}{2}s(s(r-1) + r + 1 - 2n)$$ である。

（定理終）

上の定理で与えた上限をもつグラフを図 6. 1 に示す。

第 7 章　結　　論

実用上しばしば起こる最小二部グラフ化問題を取り上げ，そのマトロイド構造上の性質を明らかにし，それらの問題がいずれもＮＰ一完全であることを示した。この結果は，組合せ・グラフ問題の計算の複雑さを表わす最も重要な指標の１つである，ＮＰ一完全性の解明に役立つであろう。ＮＰ一完全であることが既知である最大閉路問題に双対な，最大カットセット問題がＮＰ一完全であることを示した。これは，双対の概念の観点からみて，興味深い結果である。更に，m_p^rの個々のムーア型機械のツアーを求める問題はＮＰ一完全であるが，m_p^rにおけるツアーの長さの上限は簡潔な形で求めることを示した。このようにして，順序機械の故障検査の計算の複雑さを表わす１つの有効な指標を与えた。



$p = s(2r+1) + t,\ 0 \leq t \leq 2r-2$

かつ $n = s(r-1) + 1 + \{\frac{t-2}{2}\}$

図 6.1　ツアーの長さが h (p, r) である有向グラフ D_p^r

審 査 結 果 の 要 旨

回路網接続，ネットワークフローなど種々の問題は，組合せ・グラフ問題に帰着される。電子計算機の利用によって，大規模の組合せ問題が解かれるようになったが，効率のよいアルゴリズムの発見とか，どの程度の計算時間で解が求まるかなど，計算の複雑さに関する問題は，その研究が緒についたばかりである。

著者は，実用上重要と思われる幾つかの組合せ・グラフ問題をとりあげ，とくに，２部グラフ及びオイラグラフに関連する問題の計算の複雑さについて，詳細に研究した。本論文はその成果をとりまとめたもので，全文７章よりなる。

第１章は序論である。第２章では，第３章以下の議論で用いる用語の定義について説明している。

第３章では，２部グラフ及びオイラグラフを抽象化した偶マトロイドなる概念を導入し，とくに，(1) 極大な偶部分マトロイドを求めること，(2) 極大な偶縮約マトロイドを求めること，及び(3)極大な偶縮約部分マトロイドを求めることは，除去すべき極小部分集合が同一になりうる点で，互に等価であるという興味ある事実を導いている。

第４章では，前章の結果を用いて，最小２部グラフ化問題を扱っている。すなわち，枝の開放除去，枝の短絡除去，節点の除去，あるいはこれらを組合わせた操作によって２部グラフを作るとき，除去すべき枝及び節点の数が最小になるように選ぶ問題は，ＮＰ完全であることを証明している。

第５章では，グラフの最大閉路を求める問題と双対な関係にある，最大なカットセットを求める問題もまたＮＰ完全であることを明らかにしている。

第６章では，強連結順序機械のすべての遷移枝，あるいはすべての状態を通る最短閉路長の上限を求めている。これは順序機械の故障検査の複雑さを測る一つの基準として評価される。

第７章は結論である。

以上要するに，本論文は最小２部グラフ化問題ならびに最大カットセット問題がＮＰ完全であることを明らかにすると共に，順序機械の故障検査用入力系列の長さを求める問題に応用して，組合せ問題の計算の複雑さに関する多くの重要な知見を加えたもので，通信工学及び情報工学に寄与するところが少なくない。

よって，本論文は工学博士の学位論文として合格と認める。