氏　　　名	江　島　俊　朗（えじま としあき）
授与学位	工　学　博　士
学位授与年月日	昭和53年3月24日
学位授与の根拠法規	学位規則第5条第1項
研究科，専攻の名称	東北大学大学院工学研究科 （博士課程）情報工学専攻
学位論文題目	**システムの構造安定性に関する研究**
指導教官	東北大学教授　木村　正行
論文審査委員	東北大学教授　木村　正行　東北大学教授　野口　正一 東北大学教授　竹田　宏　東北大学助教授　丸岡　章

論 文 内 容 要 旨

生物学，物理学あるいは工学から起ってくる“実際の”システムを扱おうとすると当然のことながら外部からのなんらかの作用による摂動がシステムに加わってくるし，あるいはまた，システムの内部構造のゆらぎによって摂動が生じてくる場合も少なくない。したがって，このような摂動がシステムの特性に如何なる影響を及ぼすかということを考察することはシステム解析の上で重要である。それゆえ，つぎのような問題を論ずることは上述の考察を進める上で重要な意味をもってくる。すなわち，「摂動が加わっても（生じても）特性がそれほど変化しないシステムは如何なるものか？」（本論文ではこれを構造安定性の問題と呼ぶ)。

この種の問題は確率オートマトン，線形オートマトン及び両者の一般形とみなしうる線形空間オートマトンにおいて，オートマトンの強安定性の問題として考察が加えられており，強安定であるための必要十分条件が得られている。(1)〜(3) また，微分方程式系においては恒常的攪乱の下での安定性という言葉で古くから論じられており系が一様漸近安定（リヤプノフの意味における）

であれば恒常的撹乱の下で安定であることが知られている。[4]

本論文は，つぎのような見地に立って離散時間線形システム（Discrete-Time Linear Systems；DLSと略す）の構造安定性の問題を取り扱ったものである。すなわち，DLSに加わる摂動の“機構”とその摂動の下で安定であるようなDLSの“特性”との間にはどのような関係があるか。なお，本論文において着目する摂動の“機構”はつぎの2つのものである。

(a) 時間の変化及び状態の大きさの変化に伴って，摂動の大きさはどのように変化するか。

(b) 摂動がシステムのどの部分に加わるか。

また，本論文で考察の対象とするDLSは，

$$X(t+1)=X(t)A_{\oplus}(t) \tag{1}$$

である。ここで，X（t）は状態ベクトル（ν次元ベクトル）であり，

$$A_{\oplus}(t)=\begin{bmatrix} A_1(t) & O & \cdot & \cdot & O \\ O & A_2(t) & \cdot & \cdot & O \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ O & \cdot & \cdot & \cdot & A_k(t) \end{bmatrix} \tag{2}$$

は時刻tでの状態推移行列（ν×ν実行列）である。また，

$$X_g(t+1)=X_g(t)A_g(t) \qquad (g=1,2,\cdots,k)$$

で表わされるシステムをLを構成しているg番目のシステムと呼びL_gで表わすことにする。

Lに加わる摂動を$P(s,x)$（$P:N^+_{\cup}\{0\}\times R^{\nu}\to m(\nu,\nu)$；$N^+$は自然数の集合，$R^{\nu}$はν次元ユークリッド空間，$m(\nu,\nu)$はν×ν実行列の集合を表わす）で表わすことにする。摂動$P(s,x)$が時刻uからLに加わっているとき，時刻u＋sでの状態推移行列は$A_{\oplus}(u+s)+P(S,X(u+s))$である。ただし，$X(u+s)$は摂動$P(s,x)$がLに加わっているときの時刻u＋sでの状態ベクトルである。当然のことながら，Lに摂動$P(s,x)$が加わるとLを構成している各L_g（$g=1,2,\cdots,k$）の間には相互作用の関係が生じてくる。

つぎに，上述した(a)と(b)（摂動の“機構”）に着目してみて同じような摂動の集まりである摂動群$P\{\chi(s,r),\ m\langle G\rangle\}$をつぎのように定義する。

$$P\{\chi(s,r),\ m\langle G\rangle\}\triangleq\{P(s,x)\mid {}^{\exists}M:N^+_{\cup}\{0\}\times R^{\nu}\to m\langle G\rangle \\ P(s,x)=\chi(s,\|x\|)M(s,x)\}$$

ここで，$\chi:N^+_{\cup}\{0\}\times R^+_{\cup}\{0\}\to R^+$（正の実数）であり，$G=\langle V,E\rangle$は有向グラフを表わす（$V=\{1,2,\cdots,k\}$は点の集合であり，点gはLを構成しているg番目のシステムL_gに対応している。Eは枝の集合であり，Eの各要素はVの要素の順序対である）。$m\langle G\rangle$は各要

素の絶対値が1以下の$\nu\times\nu$実行列Mからなる集合であり，かつ，$(g, h)\in E$ならば行列Mにぬいてg番目の行ブロックでかつh番目の列ブロックの中の各要素は常に零である（行ブロック，列ブロックについては式(2)を参照）。摂動群の定義から分かるように，$\chi(s, r)$，Gはそれぞれ$P\{\chi(s, r),\ m\langle G\rangle\}$に含まれる摂動の(a)の"機構"，(b)の"機構"を特徴づけている。

本論文の2章で，以下の議論の中核をなす安定摂動群なる概念を導入する。$P\{\chi(s, r),\ m\langle G\rangle\}$がLの安定摂動群であるとはつぎの条件を満足する$\delta>0$が存在するときをいう。すなわち，任意の$P(s, x)\in P\{\chi(s, r),\ m\langle G\rangle\}$に対して，$\delta P(s, x)$という形の摂動がLに加わってもLの挙動は大幅には変化しない。

本論文の3章以後の議論は，"機構"が異なる種々の摂動群（$\chi(s, r)$, Gが異なる種々の$P\{\chi(s, r),\ m\langle G\rangle\}$）に対して，それが安定摂動群となるLを特徴づけるという方向で進められる。そして，与えられた摂動群が安定摂動群となるLのクラスは，その摂動群の"機構"の違いによってどのように違ってくるかを検討する。

本論文の3章では，$k=1$の場合，つまり式(2)において，$A_{\oplus}(t)=A_1(t)$なるシステムLを考察の対象にする。最初に，$P\{\chi(s),\ m\langle G_1\rangle\}$（$G_1=\langle\{1\},\{(1, 1)\}\rangle$）なる摂動群が安定摂動群となるLを調べる。その結果は図. 1で示すことができる。

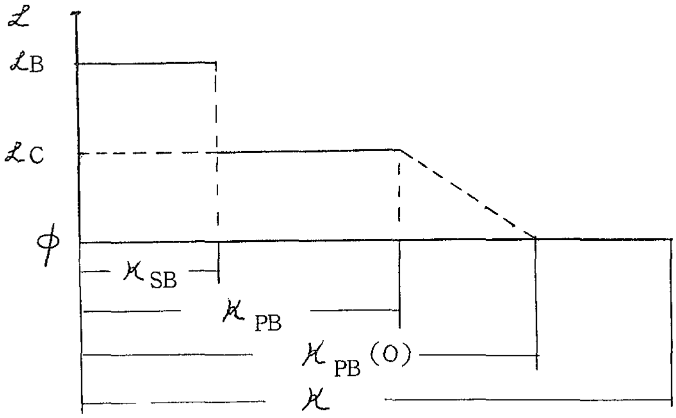

図 1

図1のグラフでは横軸に$\chi(s)$のクラスを目盛ってあり，縦軸には$P\{\chi(s),\ m\langle G_1\rangle\}$が安定摂動群となるLのクラスを目盛ってある。又，

$$\mathcal{K} \triangleq \{\chi(s)\}$$

$$\mathcal{K}_{SB} \triangleq \left\{\chi(s) \,\middle|\, {}^{\exists}K>0,\ \sum_{s=0}^{\infty}\chi(s)\leq K\right\}$$

$$\mathcal{K}_{PB(\omega)} \triangleq \left\{\chi(s) \,\middle|\, {}^{\exists}K>0,\ {}^{\exists}\delta>0,\ {}^{\forall}t\in N^{+}\cup\{0\},\ \prod_{s=0}^{t}(\omega+\delta\chi(s))\leq K\right\}$$

$\mathcal{K}_{PB} \triangleq \{\chi(s) \mid \forall\omega\ (0 \le \omega < 1),\ \chi(s) \in \mathcal{K}_{PB}(\omega)\}$ $(\mathcal{K}_{SB} \subsetneq \mathcal{K}_{PB} \subsetneq \mathcal{K}_{PB}(\omega) \subsetneq \mathcal{K}$; $0 \le \omega < 1$) であり， $\mathcal{L} \triangleq \{L\}$

$\mathcal{L}_B \triangleq \{L \mid \exists F > 0, \forall s,\ t \in N^+_U\{0\},\ \|\Phi(s, t)\| \le F\}$

$\mathcal{L}_C \triangleq \{L \mid \exists T \in N^+, \exists\lambda\ (0 \le \lambda < 1),\ \forall \ell \in N^+_U\{0\},$

$\|\Phi(\ell T, (\ell+1)T)\| < \lambda \wedge L \in \mathcal{L}_B\}$

である。ここで，$\Phi(s, t) \triangleq A(s)A(s+1)\cdots A(t-1)$ であり，$\|\cdot\|$ は行列ノルムを表わす。

つぎに，種々の $\chi(s, r)$ に対して，$P\{\chi(s, r), m\langle G_1\rangle\}$ が安定摂動群となるための（Lが満たす）必要条件，十分条件あるいは必要十分条件を与える。ここで得られた諸結果は図1で示される結果とほぼ完全に含む形で得られる。

本論文の4章では，式(1)で記述されるLに対して，$P\{\chi(s), m\langle G\rangle\}$ が安定摂動群となるようなLを特徴づける。ここで，$\chi(s) \in \mathcal{K}_D$ であり，$\mathcal{K}_D \triangleq \{\chi(s) \mid \exists d \ge 1, \forall s, t\ (s \le t) \in N^+_U\{0\},\ d\chi(s) \ge \chi(t)\}$。いま，$\mathcal{K}_D(N) \triangleq \{\chi(s) \mid \chi(s) \in \mathcal{K}_D,\ \{\chi(s)\}^N \in \mathcal{K}_{SB}\}\ (N \in N^+_U\{0\})$，$\mathcal{K}_D(-1) \triangleq \phi$，$\mathcal{K}_D(\infty) \triangleq \mathcal{K}_D$ とする $(\mathcal{K}_D(-1) \subsetneq \mathcal{K}_D(0) \subsetneq \cdots \mathcal{K}_D(N-1) \subsetneq \mathcal{K}_D(N)\ \cdots)$。すると，つぎの定理が成立する。

〔定理〕 Lを構成するすべての $L_g\ (g = 1, 2, \cdots, k)$ が L_B の要素であるとする。そのとき，任意の $\chi(s) \in \mathcal{K}_D(N) - \mathcal{K}_D(N-1)\ (N \in N^+_U\{0\})$ に対してつぎのことが成立する：

(i) $P\{\chi(s), m\langle G\rangle\}$ はLの安定摂動群である。

$\Longleftrightarrow$

(ii) 有向グラフ $G = \langle V, E\rangle$ における長さN以下の任意の道 $[g_0, g_1, \cdots, g_{N'}]$ $(0 \le N' \le N)$ に対して，各 $g_i\ (i = 0, 1, \cdots, N')$ をインデックスにもつ $N'+1$ 個のDLSの集合 $\{L_{g_0}, L_{g_1}, \cdots, L_{g_{N'}}\}$ は Λ－条件を満足する。

Λ－条件は複数個のDLS間のある関係を表わす条件であり（Λ－条件の記述は割愛する），つぎのような性質を有する：

(A) $L_g \in \mathcal{L}_C\ (g = 1, 2, \cdots, \ell)$

$\Longleftrightarrow$

$\{L_1, L_2, \cdots, L_\ell\}$ は Λ－条件を満足する。

$\Longleftrightarrow$

$L_g \in \mathcal{L}_B\ (g = 1, 2, \cdots, \ell)$

(B) $\{L_1, L_2, \cdots, L_\ell\}$ が Λ－条件を満足する。

$\Longleftrightarrow$

$\forall g, h\ (1 \le g, h \le \ell,\ g \ne h)$，$\{L_g, L_h\}$ は Λ－条件を満足する。

上述の定理と(A)，(B)を用いることにより，$P\{\chi(s), m\langle G\rangle\}$ が安定摂動群となるLのクラスと $\chi(s)$，G（摂動群の"機構"）との関係が明確になる。

本論文の5章では，離散時間線形確率システム及び離散時間非線形システムに対して，3章，

4章で得られた結果を拡張する方向で検討を進めている。

参 考 文 献

(1) G. H. Flachs : "Stability and cut points of probabilistic automata" Ph. D. Thesis, Michigan State Univ. (1967)

(2) A. Paz and M. Rabinovitz : "Linear automata approximation problem", IEEE Trans., C−23, p. 249 (1974)

(3) Sugino, Inagaki and Fukumura : "A note on the linear space automata stability problem", IEEE Trans., C−25, p. 678 (1976).

(4) A. Halanay : "Differential equations. Stability, oscillations, time lags", Chap. 1, Acad. press (1966)

審 査 結 果 の 要 旨

システムの構造に摂動が加えられた場合に，システムの挙動に不連続的な変化が生じるか否かを究明する，いわゆる構造安定性の問題が最近注目されるようになった。しかし，この分野の研究はその歴史も浅く解決すべき多くの問題が残されている。

著者は，主として離散時間線形システムの構造安定性について考察し，種々の摂動のクラスに対してシステムが構造安定であるための諸条件を解明した。本論文はその成果をまとめたもので全編6章よりなる。

第1章は序論である。第2章では，まず摂動が時間およびシステムの状態のどのような関数として表わされるかということ，および摂動がシステムの構造を表わす状態推移行列のどの部分に加えられるかという2つの観点から，摂動の集合を同じ特徴を持つ摂動のクラス（摂動群）に類別する方法を示し，ついで摂動群に対するシステムの構造安定性の定義を与えている。

第3章では，摂動が任意の部分に加わるものとし，各時刻の摂動の無限和および無限積の有界性に基づいて類別された種々の摂動群に対する離散時間線形システムの構造安定性を解明している。まず摂動が時間のみの関数で与えられる場合には，各摂動群に対して構造安定となるシステムのクラスが完全に特徴づけられることを示し，ついで摂動が時間とシステムの状態ベクトルの大きさの関数で与えられる場合には，各摂動群に対してシステムが構造安定となるための必要十分条件または十分条件を導いている。これらは注目すべき知見である。

第4章では，複数個の離散時間線形システムからなる直和システムの構造安定性について考察し，システムの構造を規定するΛ－条件を導入することにより，状態推移行列のどの部分に摂動が加えられるかによって特徴づけられる種々の摂動群に対して，システムが構造安定であるための必要十分条件または十分条件を導いている。これは複雑なシステムの構造安定性の解明に有用な知見を加えたものといえる。

第5章では，より一般的なシステムである離散時間確率システムおよび離散時間非線形システムの特殊なクラスに対して，第3章と第4章で得られた結果の1部が適用できることを示している。第6章は結論である。

以上要するに，本論文はシステムに加わる摂動の特徴に基づいて類別された種々の興味ある摂動群に対して，主として離散時間線形システムが構造安定であるための諸条件を解明したもので，システム工学に寄与するところが少なくない。

よって，本論文は工学博士の学位論文として合格と認める。