氏　　　　　名	井前　　　譲（いまえ　じょう）
授 与 学 位	工 学 博 士
学位授与年月日	昭和 56 年 3 月 25 日
学位授与の根拠法規	学位規則第 5 条第 1 項
研究科，専攻の名称	東北大学大学院工学研究科 （博士課程）精密工学専攻
学 位 論 文 題 目	**不連続最適制御問題に関する研究**
指 導 教 官	東北大学教授　箱守京次郎
論 文 審 査 委 員	東北大学教授　箱守京次郎　東北大学教授　酒井　高男 東北大学教授　戸部　俊美　東北大学教授　畑中　　浩 東北大学教授　竹田　　宏

論 文 内 容 要 旨

第1章　緒　　言

Pontryagin らにより最大原理が発表されて以来，与えられた評価関数を最小にする最適制御の手法は制御工学の設計手法として重要な位置を占め，状態方程式や評価関数が状態変数に関して微分可能な場合には多くの応用上の実績をもっている[1]。

ところで，状態空間の領域により評価が異なる場合や，不連続に変化する要素（クーロン摩擦やリレー要素など）や連続であるが微分不可能な箇所を含む要素（飽和および不感帯特性をもつ要素など）がシステムに含まれる場合には，状態空間を適当に分割してそれぞれの領域では微分可能な状態方程式や評価関数で表現する不連続最適制御問題[2]として定式化されて最適操作量の満足すべき最大原理形式の必要条件が導かれているが，設計の立場からみるとなお解決されねばならない幾つかの問題が残されている。また，状態方程式や評価関数が微分不可能ではあるが連続な場合には状態空間を分割することなく扱う試みが純粋理論的な立場からなされつつある[3]が，制御系の設計手法となるには至っていない。

本論文では，不連続最適制御問題に関して分割領域の内部においても微分不可能な箇所がある場合をも考慮して，より一般的な最大原理形式の必要条件を導出し，さらにその条件に基づき実際に最適操作量を構成する設計アルゴリズムを提案する。

第2章　不連続最適制御問題 I

本章では最適軌道が境界超曲面を瞬時に通過する場合を扱い，境界超曲面内を滑る場合は第3章で検討する。ここでは，超曲面 $g_k(x)=0$ $(k=1, \cdots, \ell-1)$ により状態空間が X_k (X_k は開集合，$k=1, \cdots, \ell$) に有限分割されていて，状態方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = f_k(x(t), u(t)), \quad x(t) \in X_k \ (k=1, \cdots, \ell) \tag{1}$$

初期・終端条件

$$x(0) = x_0 \tag{2}$$

$$q(x(1)) = 0 \tag{3}$$

のもとで評価関数

$$J(u) = \int_0^1 L_k(x(t), u(t))\,dt, \quad x(t) \in X_k \ (k=1, \cdots, \ell) \tag{4}$$

を最小にする操作量を求める問題を考える。ここに，x は n 次元状態ベクトル，u は r 次元操作量ベクトルである。

ところで，f_k，L_k，q には微分可能性を仮定していないため，微係数を拡張した概念（ラパーとなづける）を新たに提案する。$x_0 \in R^n$ における関数 $h(x)$ のラパー $Wh(x_0)$ を，$h(x)$ に一様収束する1回連続微分可能な関数列を用いて x_0 の近傍における微係数の集合を考え，その極限の凸包として定義する。ラパーの具体的な形に関しては，1回連続微分可能な関数の場合には従来の微係数をラパーとして選ぶことができる。

本章では，ラパーを用いてより一般的な最大原理形式の必要条件を導出した。

［必要条件］

最適操作量，最適軌道をそれぞれ $\overline{u}$，$\overline{\mathbf{x}}$ とする。その時，可測関数 $F_k^*(t)$，行列 Q^*，随伴ベクトル $\psi_k(t)$，行ベクトル a^* が存在して次式が成立する。

(i) $$F_k^*(t) \in \bigcap_{e>0} \ \bigcup_{|\overline{\mathbf{x}}(t)-\mathbf{x}| \leqq e} W\mathbf{f}_k(\mathbf{x}, \overline{u}(t)) \quad \text{a.e.} \ t \in [\overline{t}_{k-1}, \overline{t}_k] \tag{5}$$

(ii) $$Q^* \in W\mathbf{g}(\overline{\mathbf{x}}(1)) \tag{6}$$

(iii) $$\psi_k^T(t) = \psi_k^T(\overline{t}_k - 0) + \int_t^{\overline{t}_k} \psi_k^T(\tau) F_k^*(\tau)\,d\tau, \quad t \in [\overline{t}_{k-1}, \overline{t}_k] \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \psi_{k'}^T(\overline{t}_{k'} - 0) &= \psi_{k'+1}^T(\overline{t}_{k'} + 0) \\ &+ \psi_{k'+1}^T(\overline{t}_{k'}+0)\,[\mathbf{f}_{k'+1}(\overline{\mathbf{x}}, \overline{u}(\overline{t}_{k'}+0)) - \mathbf{f}_{k'}(\overline{\mathbf{x}}, \overline{u}(\overline{t}_{k'}-0))]^{-1} \\ &\times \left[\frac{\partial \mathbf{g}_{k'}(\overline{\mathbf{x}}(\overline{t}_{k'}))}{\partial \mathbf{x}}\right] \left[\frac{\partial \mathbf{g}_{k'}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}_{k'}(\overline{\mathbf{x}}, \overline{u}(\overline{t}_{k'}-0))\right]^{-1} \end{aligned} \tag{8}$$

$$\psi_\ell^T(1) = a^* Q^* \tag{9}$$

(iv) $\psi_k^T(t)\ \mathbf{f}_k(\overline{\mathbf{x}}(t),\ \overline{u}(t)) = \max_{v \in U_k} \psi_k^T(t)\ \mathbf{f}_k(\overline{\mathbf{x}}(t),\ v)$

$$t \in [\overline{\tau}_{k-1},\ \overline{\tau}_k] \quad \{\overline{u}(t)\ \text{の連続点の集合}\} \tag{10}$$

ここに，$\mathbf{x}$は評価関数を考慮した$n+1$次元状態ベクトル，$\mathbf{f}_k$，$\mathbf{q}$，$\mathbf{g}_{k'}$はそれに応じてf_k，q，$g_{k'}$を拡張した関数である。また，$\overline{\tau}_{k'}$は超曲面$g_{k'}(x)=0$を通過する時刻であり，$\overline{\tau}_0=0$，$\overline{\tau}_\ell=1$，$k=1$，…，ℓ，$k'=1$，…，$\ell-1$である。

式(7)から，随伴ベクトルの跳躍現象に関して，最適軌道が超曲面を通過する時に，またその時に限り跳躍現象が生じる随伴ベクトルの存在が示される。このことは，不連続最適制御問題として定式化する場合，状態空間の分割に際して分割数をできる限り少なくする方が望ましいことを意味している。ところで，すべての点で微係数が存在する場合には，ラパーとしてその微係数を選ぶことにより従来の結果と一致する必要条件が得られる[2]。

第3章　不連続最適制御問題 II

本章では，最適軌道が境界超曲面内を滑る場合を考え，Boltyanskii により考案された局所断面[4]の概念を適用して最大原理形式の必要条件を導出した。その結果，最適軌道が超曲面に到着する時にのみ跳躍現象が生じて，超曲面から離れる時には連続となるように随伴ベクトルを選び得ることを示した。

第4章　数値解法アルゴリズム

本章では，第2章，第3章で得られた必要条件に基づいて，最適制御系を設計するための数値解法アルゴリズムを提案する。本アルゴリズムは，ある操作量から出発してその修正を繰り返しながら最適操作量を求める反復解法である。ここでは，アルゴリズム自体の収束の証明と操作量の修正方法の簡単化のために新たな強変分構成法を検討する。この方法はChattering Controlsの考え方に基づくものである。

［アルゴリズム］

ステップ0；断片連続関数$u:[0,\ 1]\rightarrow U$，定数$M\in(0,\ 1)$を選ぶ。

ステップ1；$i=0$。

ステップ2；式(1)，(2)より$x^i(t)$を求める。

ステップ3；u^i，x^iを用いて，式(7)～(9)により$\psi^i(t)$を求める。

ステップ4；式(10)より断片連続関数$r^i(t)$を求める。ただし$\overline{u}(t)$のかわりに$r^i(t)$とおく。

ステップ5；$r^i=u^i$ならば計算終了。その他はステップ6へ。

ステップ6；従来のものとは異なる強変分構成法により$\widetilde{u}_\varepsilon(t)$を構成して，$u^{i+1}(t)$を求める。

$$J(u^{i+1})-J(u^i)\leqq M\left[\inf_{\varepsilon\in I^i}(J(\widetilde{u}_\varepsilon)-J(u^i))\right] \tag{11}$$

ここに，$I^i\triangleq\{\varepsilon\in[0,\ 1]\mid\widetilde{u}_\varepsilon(t)\text{が存在する}\}$。

ステップ7；$i=i+1$としてステップ2へ。

[$\widetilde{u}_\varepsilon(t)$ の構成法]

最初に制御区間［0，1］を適当に s 等分して部分区間 I_α（$\alpha=1, \cdots, s$）に分割する。さらに，I_αを 2 等分して，左から順に I_α^1，I_α^2 とする。ただし，$|I_\alpha^1| = \varepsilon |I_\alpha|$，$|I_\alpha^2| = (1-\varepsilon)|I_\alpha|$。したがって，$\widetilde{u}_\varepsilon(t)$ が次のようにして構成できる。

$$\widetilde{u}_\varepsilon(t) = \begin{cases} r^i(t) \; : \; t \in I_\alpha^1 \\ u^i(t) \; : \; t \in I_\alpha^2 \end{cases} \qquad (\alpha = 1, \cdots, s) \tag{12}$$

さらに，本アルゴリズムにより生成される操作量の関数列は，第 2 章で得られた必要条件を満足する解に収束することを明らかにした（ただし，ここでは f_k，L_k，q は状態変数に関して微分可能であるとして記述してある）。また特別な場合として，通常の最適制御問題に関する数値解法アルゴリズムの収束を証明した。

第 5 章　設　　計

前章で導かれた数値解法アルゴリズムに基づいて，実際に計算機プログラミングをおこなう。本章では，設計という立場にたって，本アルゴリズムのプログラミングにおける問題点を検討するとともに，具体的な設計例を通して本手法の有効性を確かめた。

その結果，本アルゴリズムの特徴として，

(i) 収束に要するイテレーション回数が少ない，

(ii) 操作量に拘束がある場合，ない場合，操作量が量子化されている場合，いない場合などいずれの場合にも適用できる

ことが明らかになった。

第 6 章　結　　言

(i) 境界超曲面を瞬時に通過する場合の不連続最適制御問題に関して，微係数にかわる新たな概念（ラパーとなづけた）を提案して，各分割領域内でも微分不可能な点を含む場合に対する最大原理形式の必要条件を導出した。

(ii) 超曲面内を滑る場合の不連続最適制御問題に関して，最大原理形式の必要条件を導出した。

(iii) 新たな強変分の構成法による，最大原理に基づいた数値解法アルゴリズムを，不連続最適制御問題に関して提案した。また，そのアルゴリズムの収束性を，第 2 章で導かれた必要条件を用いて証明した。

(iv) 第 4 章で得られた数値解法アルゴリズムを用いて，最適操作量の計算をおこない，その有効性を確かめて不連続最適制御系設計の一手法となり得ることを示した。

文　　　献

1) Athans, M. and Falb, P. L., OPTIMAL CONTROL, (1966), McGraw-Hill, Inc. ほか。

2) 増淵・嘉納，系の拘束条件と評価関数が断片的に異なる最適制御について，機講論，191 (1968)，53/56.

3) Clarke, F. H., The Maximum Principle under Minimal Hypotheses, SIAM J. Control and Optimization, 14-6 (1976), 1078/1091.

4) ボルチャンスキー，V. G. (坂本実 訳)，増補改訂最適制御の数学的方法，(1974)，308/333，総合図書。

審 査 結 果 の 要 旨

ポントリャーギンらによる最大原理の導入以来，最適制御は制御工学の根幹をなす一分野としての地位を占めているが，そこでは通常制御対象を記述する状態方程式ならびに評価関数が状態変数に関して連続可微分であることが仮定されてきた。一方この条件が満足されない工学的問題も多く，そのために状態空間を有限個の部分に分け，各部に対して別個の状態方程式・評価関数を割当てながら全域的な最適操作量を求める不連続最適制御問題が重要となる。しかるに，その一般的で有効な解法は未だに見出されていなかった。

本論文はこの不連続最適制御問題の解法を論じ，最適解の基礎的性質の解明，数値解法アルゴリズムの提案を通して制御系設計手法の確立を目指したもので全文6章より成る。

第1章は緒言である。第2章において不連続最適制御問題に関する従来の研究を総括するとともにそれらを包含する一般的な同問題を定義し，その解を与えた。すなわち，各区分空間に対する状態方程式・評価関数が状態変数に対して連続ではあるが微分係数が存在しない点を含み，また状態軌道が区分超曲面を瞬時に通過する場合に対して，微分係数に代わる新たな概念を導入しそれを用いて統一的で明確な解析を行い，最適操作量が満足すべきより一般的な最大原理形式の必要条件を導出するとともに，共状態変数の挙動を論じて明快かつ有用な成果を得ている。第3章において状態軌道が区分超曲面内を滑る場合の問題を可微分性を仮定して取扱い，局所断面の手法を巧みに適用することにより，同じく最大原理形式の必要条件を導き，また共状態変数の超曲面での跳躍回数を高々一回におさえうることを明らかにし，その跳躍量を与えた。これは興味ある知見である。

第4章では，新しい強変分の構成法に基づく最適操作量の数値解法アルゴリズムを提案するとともに，その数値解が第2章の最大原理形式の必要条件を満たす解に収束することを証明して不連続最適制御系設計の基礎手法を確立した。これは実用上重要な提案といえる。第5章において幾つかの設計例を通して本手法の有用性を明らかにしている。第6章は結論である。

以上要するに，本論文は不連続最適制御問題を一般的な立場から再構成し，最適操作量の満足すべき必要条件を導き，共状態変数の挙動を明らかにするとともに，収束の保証される数値解法アルゴリズムを提案して不連続最適系設計に有用な一手法を加えたもので，制御工学の発展に資するところ少なくない。

よって，本論文は工学博士の学位論文として合格と認める。