氏　名（本籍）	平　野　芳太郎（北海道）
学位の種類	工　学　博　士
学位記番号	工　第　９　７　号
学位授与年月日	昭和４５年２月４日
学位授与の要件	学位規則第５条第２項該当
最終学歴	昭和２１年９月 名古屋帝国大学工学部物理工学科卒業
学位論文題目	多数の直線棒および円筒と円板の接続系の自由振動に関する研究
論文審査委員	（主査） 教授 斎藤 秀雄　教授 玉手 統 教授 渥美 光　教授 八巻 昇 教授 柴山 乾夫

論　文　内　容　要　旨

序　　　　言

多数の直線棒を接続した構造は応用分野が広く，機械・器具の精密化，車両・航空機等の軽量化・高速化に伴い，その振動特性は重要課題として研究され，計算機による数値解法もすすみ，線形自由振動のわく内では基本的にはほぼ解決ずみと考えられる。また，化学プラント・大形石油タンク等の容器，宇宙船体など殻の振動も重要な研究課題になっている。多くの殻容器のなかには近似的に円筒と円板との結合系と考えられるものは相当に多いが，その報告はほとんどなく，詳しい研究はまだ発表されていない。本研究は円筒と円板とを接続した系の振動特性を解明するのが主眼である。

本論文は第１部に直線棒を接続した系の振動を，第２部に主題の円筒と円板の結合系の振動を主として取扱っている。

第1部　直線棒を接続した系の振動

第1章　緒　　　言

多数の直線棒を接続した系の自由振動の理論，系に対称性があるとき，それに基づく規準振動の形の分類，および例題として特定な対称性をもつ立体わく組の振動をこの第1部において取扱う。

第2章　直線棒を接続した系の自由振動の理論

任意の1本の棒（n）の長さをℓ_nとし，その一端を原点として中心軸をx_n軸にとり，右手系の直交座標系（x_n, y_n, z_n）を定める。ただし，y_n，z_n軸は断面の中心を通り，互に直交する断面の主軸にとる。中心軸の変位をx_n, y_n, z_n軸にそい（u_n, v_n, w_n）$\sin pt$，x_n軸まわりのねじり変位を$\phi_n \sin pt$とする。pは円振動数を示す。E_n, S_n, γ_nを棒（n）の縦の弾性係数，断面積，比重量，gを重力加速度とし，$\zeta_n^2 = \gamma_n S_n \ell_n^2 p^2 / g E_n S_n$とすると，この棒の一週期の縦振動のラグランジュアンL_{un}は

$$L_{un}=\frac{E_n S_n}{2}\int_0^{\ell_n}\left[\left(\frac{\zeta_n}{\ell_n}\right)^2 u_n^2-\left(\frac{du_n}{dx_n}\right)^2\right]dx_n$$

これの停留条件　$\delta L_{un}=0$　に対する　Euler方程式は周知の方程式　$d^2u_n/dx_n^2+(\zeta_n/\ell_n)^2 u_n=0$でその解は積分定数を両端の境界値$U_n|_{x_n=0}=u_{on}$，$u_n|_{x_n=\ell_n}=u_{\ell n}$でおきかえ次式になる。

$$u_n=\frac{u_{\ell n}-u_{on}\cos\zeta_n}{\sin\zeta_n}\sin\frac{\zeta_n}{\ell_n}x_n+u_{on}\cos\frac{\zeta_n}{\ell_n}x_n \cdots\cdots(1)$$

L_{un}の部分積分を行ない

$$L_{un}=\frac{E_n S_n}{2}\int_0^{\ell_n}\left[\frac{d^2u_n}{dx_n^2}+\left(\frac{\zeta_n}{\ell_n}\right)^2 u_n\right]u_n dx_n-\frac{1}{2}E_n S_n\frac{du_n}{dx_n}u_n\Big|_{x_n=o}^{x_n=\ell_n}$$

これに上のu_nを代入すると積分項は消失し，境界項から容易に次式になる。

$$L_{un}=-\frac{E_n S_n}{2}\frac{\zeta_n}{\ell_n\sin\zeta_n}\left[(u_{on}^2+u_{\ell n}^2)\cos\zeta_n-2u_{on}u_{\ell n}\right]\cdot\cdot(2)$$

変位v_n,w_nに関する曲げ振動，ϕ_nに関するねじり振動のラグランジュアンL_{vn}, L_{wn}, L_{ϕ_n}も同様棒の両端の境界値の二次の同次式で表わすことができる。

直線棒を接続した系の振動は一般にこれらの連成振動となるから，全系のラグランジュアンLは各棒のそれの総和$\sum_n(L_{un}+L_{vn}+L_{wn}+L_{\phi n})$であたえられる。境界における変位の拘束条件，接続点における変位の連続条件を用いてなお未定な境界値についてLの停留条件から振動を決定す

ることができる。この方法 * において，Lの停留条件式は境界端の力学的条件式，接続点における力，モーメントの連続条件式と一致することを示し，本質的にはEuler方程式の解 u_n，v_n，w_n，ϕ_n を直接境界条件，連続条件に代入して積分定数（あるいは境界値）を決定する普通の方法と同値であることを示した。

接続系の単位棒を支配する変位 u_n，v_n，w_n，ϕ_n はまとめて四次元ベクトルで表わされるが，接続系の固有関数を成分とした四次元の固有関数ベクトルが系全体を領域として完全直交性などの性質をもつことを示す。

細長比が十分大きい場合，細長比を無限大として極限をとり簡略する近似計算法は，ねじり振動はばね系の振動に，縦振動は伸縮変形がなく単なる質量系の振動にみなすことに相当することを示す。

第3章　対称性による規準振動の分類

分子や結晶の対称性にもとづいて，その規準振動の形の分類に群の表現論が応用されることは早くから知られている。連続体の線形振動についてもMelvin，Edwards ** の論文がある。この手法を複雑な対称性をもつわく組の振動等に利用すると，振動形に対応した振動数方程式が容易に求まる。この手法の概要を述べ既知の長方形板の振動形の分類をこの立場から検討した。

第4章　立体Y形棒の振動

1点で結合された3本の棒の他端を固定した立体わく組において，特にその1本の棒をふくむ平面に関して対称なものについて，振動形の分類に応じた方程式をみちびき，特定の場合として3対称面をもつ等長等交角になる場合の振動形も調べ，数値例から形状により細長比の影響が大きくなることを示した。一部実験値も求め計算値と比べた。

第5章　脚のある正三角形わく組の振動

1本の3割回転対称軸と3対称面をもつ系の規準振動形の分類に応じた振動の方程式を求め，数値例と実験例を示した。

---

*　高橋伸，L形棒の自由振動（固定ー固定），機械学会論文集，27巻182号（昭36ー10）1489ページ

**　M. A. Melvin & S. Edwards, Group theory of vibrations of symmetric molecules, membranes, and plates, J. Acous, Soc. America, 28—2, 1956, p.201.

第6章　直方体わく組の振動

直方体の対称性に応じた規準振動の分類を示し，振動形に応じた境界値の関係から対応する振動数方程式を困難なく求める方法を示した。互に直交する3本の棒のうち，2本が同じ長さになる場合の振動形の細分と縮重について調べ，数値例と一部の実験値も示した。

第2部　円筒と円板とを接続した系の振動

第1章　緒　　　　言

第2部では，同心円板および円筒殻の振動のラグランジュアンを求め，一端，両端，あるいは中間に円板を結合した円筒の振動の特性を調べる。

第2章　円板の振動の理論

同心円板の内，外周の半径を$\overline{R}$，R，曲げ剛性D，ポアソン比σ，板厚h，密度γ/g，また中心を原点として中央面内に極座標r，θ，円板の中心軸にそいz′軸をとり，r，θ，z′方向の変位を(u，v，w) sin pt とする。また無次元量

$$z=\alpha r/R\ ,\quad \beta=12R^2/h^2$$
$$\alpha^4=\gamma h p^2 R^4/gD\ ,\quad \overline{\alpha}=\alpha\overline{R}/R$$

を用いる。円板の外内周の境界値がフーリエ級数に展開可能として次のようにおく。

$$\left.\begin{aligned}
u|_{z=\alpha}&=c_0+\sum_n(c_0\cos n\theta+c_n^*\sin n\theta)\\
v|_{z=\alpha}&=d_0+\sum_n(d_n\sin n\theta-d_n^*\cos n\theta)\\
w|_{z=\alpha}&=a_0+\sum_n(a_n\cos n\theta+a_n^*\sin n\theta)\\
\partial w/\partial z|_{z=\alpha}&=b_0+\sum_n(b_n\cos n\theta+b_n^*\sin n\theta)
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(3)$$

内周の境界値$u|_{z=\overline{\alpha}}$等は上式で係数の上にバーをつけた式とする。なおここで$\sum_n$は$\sum_{n=1}^{\infty}$を示す。

Kirchhoffの仮定にしたがう円板の振動の1週期のラグランジュアンLは次式であたえられる。

$$L=\frac{D}{2}\left(\frac{\alpha}{R}\right)^2\iint\Big[u^2+v^2-\frac{\beta}{\alpha^2}\Big\{\Big(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{u}{z}+\frac{1}{z}\frac{\partial v}{\partial\theta}\Big)^2-2(1-\sigma)\frac{\partial u}{\partial x}\Big(\frac{u}{z}+\frac{1}{z}\frac{\partial w}{\partial\theta}\Big)$$
$$+\frac{1}{2}(1-\sigma)\Big(\frac{1}{z}\frac{\partial u}{\partial\theta}-\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{v}{z}\Big)^2\Big\}\Big]z\,d\theta\,dz$$
$$+\frac{D}{2}\left(\frac{\alpha}{R}\right)^2\iint\Big[w^2-\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\frac{1}{z}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{1}{z^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\Big)^2+2(1-\sigma)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\Big(\frac{1}{z}\frac{\partial w}{\partial z}$$
$$+\frac{1}{z^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\Big)-2(1-\sigma)\Big\{\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{1}{z}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta}\Big)\Big\}^2\Big]z\,d\theta\,dz\cdots\cdots\quad(4)$$

第1項は円板の中央面内の振動の，第2項は曲げ振動のラグランジュアンを示す。この停留条件 $\delta L=0$ に対するEuler方程式も第1項からu，vに関して，第2項からはwに関してそれぞれ分離した形で求まる。そのフーリエ級数解

$$u=u_0+\sum_n(u_n\cos n\theta+u_n^*\sin n\theta)$$
$$v=v_0+\sum_n(v_n\sin n\theta-v_n^*\cos n\theta)\qquad\cdots\cdots\cdots\ (5)$$
$$w=w_0+\sum_n(w_n\cos n\theta+w_n^*\sin n\theta)$$

に対する $u_n, v_n, w_n(u_n^*, v_n^*, w_n^*)$ の解を求め，そのなかにふくまれる積分定数をさきに示した境界定数 $a_n, b_n, c_n, d_n, \bar{a}_n, \bar{b}_n, \bar{c}_n, \bar{d}_n(a_n^*, b_n^*\cdots\cdots, \bar{d}_n^*)$ におきかえ，式(4)に代入してLを式(2)同様，これらの境界定数の二次の同次式の形で求める。このさい第1部第2章同様式(4)の部分積分を行ない，Euler方程式をふくむ積分項は消失し，境界項のみから容易に計算できる。

変位に関する境界条件を考えてなお未定な境界定数に関する停留条件から振動を定める方程式が求まるが，これらの意味は第1部の第2章にのべたことと本質的に同じである。

第3章　2本の脚をもつ円板の振動

円板の中心軸に関して軸対称でない力学系の振動の応用例として円板の一つの直径の両端に，円板に垂直に2本の脚棒をつけ，その端を固定した系の振動を調べた。計算と実験は2本の脚をふくむ平面について対称な振動に限った。

第4章　円筒殻のラグランジュアン

円筒の長さ，半径，板厚，曲げ剛性，ポアソン比，密度を 2ℓ，R，h，D，σ，γ/g とし，その中央断面上の基準半径からの角座標を θ，母線にそい x' 軸，半径方向中心向きに z' 軸をとり，$x=x'/R$，$\mu=\ell/R$，$\beta=12R^2/h^2$，$\alpha^4=\gamma hp^2R^4/gD$ とする。x'，θ，z' 方向の変位を $(u, v, w)\sin pt$ とし，両端の境界周の変位がフーリエ級数に展開可能として次のようにおく。

$$2u|_{x=\pm\mu}=p_o\pm p_o'+\sum_n[(p_n\pm p_n')\cos n\theta+(p_n^*\pm p_n^{*\prime})\sin n\theta]$$

$$2v|_{x=\pm\mu}=\pm s_o+s_o'+\sum_n[-(\pm s_n+s_n')\sin n\theta+(\pm s_n^*+s_n^{*\prime})\cos n\theta]$$

$$2w|_{x=\pm\mu}=\pm r_o+r_o'+\sum_n[\pm r_n+r_n')\cos n\theta+(\pm r_n^*+r_n^{*\prime})\sin n\theta] \tag{6}$$

$$2\frac{\partial w}{\partial x}|_{x=\pm\mu}=q_o\pm q_o'+\sum_n[(q_n\pm q_n')\cos n\theta+(q_n^*\pm q_n^{*\prime})\sin n\theta]$$

Kirchhoffの仮定にしたがう円筒のラグランジュアンは

$$L=-\frac{D}{2R^2}\iint[\beta\{u_x^2+(v_o-w)^2+2\sigma u_x(v_o-w)+\frac{1-\sigma}{2}(u_\theta+v_x)^2\}$$
$$+\{-\alpha^4(u^2+v^2+w^2)+w_{xx}^2+(w_{\theta\theta}+v_\theta)^2+2\sigma(w_{\theta\theta}+v_\theta)w_{xx}$$
$$+2(1-\sigma)(w_{\theta x}+v_x)^2\}]d\theta\ dx$$
$$-\frac{D}{2R^2}\iint[(v_\theta-w)^2+\frac{1-\sigma}{2}(u_\theta+v_x)^2+2\{u_xw_{xx}-(v_\theta-w)$$
$$(w_{\theta\theta}+v_\theta)\}-(1-\sigma)(u_\theta+v_x)(w_{\theta x}+v_x)]d\theta\ dx$$

であたえられる。ここでu_x, $w_{\theta x}$, ・・・は$\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial\theta\partial x}$,・・・を示す。このLの停留条件に対するEuler方程式は周知のFlüggeの運動方程式に一致する。うすい円筒で1に対しh／Rを無視する場合上式のLの第2項は除いてよい。

式(5)同様のEuler方程式のフーリエ解に対する一般解にふくまれる積分定数を式(6)であたえた境界定数p_n, q_n, r_n, ・・・, r_n', s_n' でおきかえ式(7)に代入して式(2)同様これらの定数の二次の同次式で表わす。両端の各種の境界条件に対する円筒の振動は，境界条件（変位に対する）を用いてなお未定な定数についてのこのLの停留条件式から定まる。その方程式の意味は第2章と同じである。

第5章　円筒の振動の数値例

前章で求めた振動数方程式から軸対称振動（n＝0），一般の振動（n≧2）およびn＝1の振動について数値例を示しその特性をあきらかにし，n≧2の振動（一端固定他端自由）に対する実験値も求め計算値と比べた。なお軸対称振動では軸方向の境界変位$p_o\pm p_o'$に，n≧1の振動

では半径方向への境界変位$\pm r_n + r_n'$に対する拘束の有無，大小が振動数に最も大きい影響を示す。

第6章　円筒と円板との結合系の軸対称振動

円筒の両端に円板を結合した場合，一端を固定し他端に円板を結合した場合の軸対称振動を調べた。結合系のラグランジュアンは円筒と結合円板のそれらの和であたえられる。結合端の連続条件を用いて，それは円筒（あるいは円板）の結合端の境界定数で表わされるから，これらの定数についての停留条件から振動数方程式を求め，円筒の長さμと振動数ωとの関係を求め図示した。また円筒部と円板部の変位を求め図示した。これらをまとめると

1）　結合系の$\mu-\omega$曲線には，その次数に対応して，両端固定円筒の$\mu-\omega$曲線群と外周固定円板の横軸に平行な直線群とでつくられるそれぞれの上限曲線が存在する。結合系の曲線は曲線部に並行する部分と直線部に並行する部分がある。

2）　上限直線に並行する部分の点に対応する振動では，相対的に円板部の振動が目だち，円筒部の変位は小さい。上限曲線に並行する部分の点の振動では円筒部の変位が相対的に大きく，円板部は小さい。

3）　上限曲線に並行する部分は両端自由円筒あるいは固定自由円筒の$\mu-\omega$曲線に近い。円筒の長さが十分に大きくなると対応次数の両端自由円筒あるいは固定自由円筒の$\mu-\omega$曲線にほとんど重なる。

4）　円板の面内の伸縮変形を無視して円板の曲げ振動のみで計算しても結果はほとんどかわらない。

3），4）の結果は円筒の軸対称振動が軸方向の境界変位に対する拘束には影響されるが，その他の境界変位に対する拘束条件にほとんど関係がないためである。

第7章　円筒と円板との結合系の振動
（端に円板を結合した場合）

主として一端を固定し他端に円板を結合した円筒，一部両端に円板を結合した円筒について，$n=2$の振動に対する振動数，変位，曲げモーメントを求め図示した。結果は前章の軸対称振動に似た傾向を示し1），2）について同じことがいえるが，3）では上限曲線の両端固定円筒の曲線の方に近づく。これは$n\geqq 2$の振動では円筒の境界端で半径方向への変位の拘束条件が最も大きい影響をもち，円板の面内の伸縮変形に対する剛性が大きく，この境界変位に対し強い拘束となるためである。

第8章　円筒と円板との結合系の振動
（中間に円板を結合した場合）

両端を固定し中間に円板を結合した円筒について，n＝3の振動に対する$\mu-\omega$曲線，変位と曲げモーメントの分布を求め検討した結果，次のことが要約できる。

1）　各次数の振動数に対し，結合部を固定した場合に，各部分の対応する適当な次数の振動数から定まる上限曲線を考えることができる。

2）　$\mu_e-\omega$曲線（中間の円板を境にして片方の円筒の長さ$2\mu_e R$）が円板の曲げ振動数で定まる上限直線に並行する部分では主として円板の変位と曲げモーメントが円筒部にくらべ相対的に大きくなる。

3）　両端固定円筒の振動数から定まる上限曲線に並行する部分では円板の変位等は相対的に小さい。円筒部のそれは円板がほぼ中央にあれば左右で差がないが，中央からはずれると一方が他方にくらべ大きくなる。基本振動では長い円筒部でそれらが大きい。

4）　基本振動数は円板のパネルあるいはフランジが中央にあるとき最大で，端に近づくにしたがい小さくなる。

5）　円筒の内側にパネル円板を結合する場合その面内の振動を無視して曲げ振動だけを考えた計算結果に近い。

第9章　実験の方法

第1部，第2部で示した実験結果を求めた方法について述べた。

結　　　論

本論文は主として多数の直線棒を接続した系および円筒と円板との接続系の振動特性の基礎的な知見を得るため，特定な形状のわく組（第1部）と端あるいは中間に円板のパネルあるいはフランジを結合した円筒（第2部）について，対称性にもとづいて振動形を分類し，接続系に対し便利な振動数方程式の誘導法を示し，数値計算の結果から特性を調べ，資料として図示または表示した。

審 査 結 果 の 要 旨

各種機械・構造物の主要な構成要素としてますます広く用いられてきている棒，板および円筒殻の接続系においては，最近の軽量化，高速化の趨勢に伴い，振動特性の究明が重要な研究課題の一つとなるに至った。これら接続系の振動，特に円板・円筒殻接続系の振動については，その解明が要望されているにもかかわらず見るべき知見がほとんどないのは，接続段数の増加につれ，振動解析の手数が加速度的に増加し，取扱いが繁雑となることにある。著者はこの繁雑さをできるだけ簡略化する手段として，系の振動のラグランジュアンＬを接続部の未定な変位値のみを含む式に表わす。そしてこれら変位値についてＬの停留条件から特性方程式を厳密に求める方法により，計算を簡略化することに成功し，本方法を多数の実例に適用した。本論文は以上の成果をまとめたもので，序言，第１部６章，第２部９章，結言よりなる。

序言においては本研究の目的，内容を説明している。

第１部は直線棒接続系の自由振動の研究であり，第１章は緒言である。

第２章では著者の解析方法を一般の直線棒接続系に適用し，部材の剛性，細長比，付加質量の振動に及ぼす影響を明らかにしている。

第３章は対称性を有する複雑な形状のわく組の規準振動の分類に，群の表現論を応用し，振動形に対応する振動数方程式を容易に求める方法を提言している。

第４章から第６章は上記解析法を立体Ｙ形わく組，三角形柱わく組および直方体わく組に適用し，それらの固有振動数が構成部材の長さ比および取付け角度の変化でいかに変化するかを図表化して明確にし，かつ実験結果とよく一致することを確かめている。

第２部は円筒殻と円板との結合系の自由振動を取扱うもので，本論文の最も重要な部分である。第１章は緒言である。

第２章から第5章においては円板および円筒殻について第１部と同種の解析を進め，振動特性を明らかにし，かつ実験結果と対比している。境界変位値の組合せにより得られる多数の各種境界条件に対し，特性方程式を与えたことは本研究の成果の一つである。

第６章および第７章は端に円板を結合された円筒殻についての，第８章は円筒殻の中間に円板のパネルあるいはフランジを結合する場合の研究である。板厚比，細長比の広い範囲にわたり結合系の振動様相を明らかにしている。円筒状機械要素，構造物などの設計に極めて有効な指針を与えたものといえよう。

第９章は実験方法について記述している。

結言は第１部，第２部の総括である。

以上要するに，本論文は棒，板および円筒殻接続系の自由振動の特性を詳細に解明し，機械・構造物要素の設計上貴重な知見を与えたもので，機械工学上寄与するところが少なくない。

よって，本論文は工学博士の学位論文として合格と認める。