氏　　　　名	山田哲義（やまだ てつよし）
授与学位	工学博士
学位授与年月日	昭和49年6月5日
学位授与の根拠法規	学位規則第5条第2項
最終学歴	昭和37年3月 東北大学教育学部学校教育学科第一部卒業
学位論文題目	**縦せん断荷重を受ける弾性体内のき裂端応力場に関する理論的研究**
論文審査委員	東北大学教授　玉手　統　東北大学教授　横堀　武夫 東北大学教授　斎藤　秀雄　東北大学教授　渥美　光 東北大学教授　八巻　昇

論文内容要旨

1. 緒　言

破壊力学を「欠陥の存在あるいは発生が予期される材料を強度上安全に使用するための工学的手法」としての側面で捕え，材料の持つ欠陥を「き裂」として模型化するとき，数理弾性論が破壊力学へ寄与し得る一面が生じる。すなわち，き裂先端の近傍における応力場の特異性の強さを表示する工学量としてIrwinによって導入された応力拡大係数の評価に関するものである。とくに，き裂先端近傍の応力分布に対する隣接境界などの影響の解明は応力拡大係数に関する資料の充実のために強く要望されるものである。

縦せん断応力状態におけるき裂問題は，断面内寸法に比し小さな柱体軸方向のき裂を有する棒をねじった場合の応力拡大係数の知見を提供するものとみなされ，工学的に重要なものであるが，二次元弾性問題の解析方法に比して縦せん断応力問題の解析方法の体系化が進んでいないことも

あり，縦せん断問題に関する応力拡大係数の知見は必ずしも多くはない。

このような諸点を考慮して，本報告は縦せん断荷重を受ける弾性体のき裂問題を取上げ，き裂端応力場に対する近接介在物などの影響を解明するための解析方法を提示し，次いでこの解法をいくつかの基本的問題に適用して縦せん断応力状態におけるき裂端応力拡大係数に関する知見を充実しようとしたものである。

2. 基　礎　式

縦せん断応力状態における変位成分および対応する応力成分は物体の占める領域で正則な1つの複素変位関数 $\varphi(z)$ で次式のように表わされる。

$$\left.\begin{aligned} & w(x,\ y) = [\varphi(z) + \overline{\varphi(\bar{z})}]\,/\,2 \\ & \sigma x = \sigma y = \sigma t = \tau xy = 0, \quad \tau xt - i\,\tau yt = 2\mu\,(\partial w / \partial z) = \mu\varphi'(z) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ここで t は x，y 面に垂直な座標軸，すなわち柱状体の母線に平行な軸とする。また，μ はせん断弾性係数である。

3. 縦せん断荷重を受ける半無限体の表面または内部の直線き裂端応力場（第2章）

縦せん断荷重を受ける半無限体の表面および内部に表面に垂直な1直線き裂があり，半無限体の表面およびき裂表面には外力が作用していないものとする。x 軸上で原点に対称な1直線あるいは2直線き裂を有する無限弾性体が縦せん断荷重を受ける場合の解が問題の対称性から y 軸に沿って自由縁の条件を満足していることに留意すれば，本問題の解は容易に導くことができる。ここではき裂縁の境界条件をHilbert問題に変換して解き，閉じた形の厳密解を求めた。

4. 不完全接着円形介在物を有する無限弾性体の縦せん断応力（第3章）

円形異質介在物が母材と不完全に接着されている複合弾性体に縦せん断荷重が作用した場合，き裂端近傍の応力の特異性を求めようとするものである。母材と介材物はそれぞれ均質等方弾性体であり，無限遠方における応力状態は一様である。また，接着されていない境界の部分には外力は作用しないものとする。

解析は，複素変位関数を用い，さらに新しい未知関数を導入することにより，き裂縁の条件を連立斉次のHilbert問題に変換する。解は閉じた形で得られる。この解から得られるき裂先端近傍の応力は二次元問題や薄板のたわみ問題の場合と著しく異なり，き裂先端からの距離の $-\frac{1}{2}$ 乗に比例し，符号が変らない形で求められた。

5. 縦せん断荷重を受ける無限弾性体内の2直線き裂の相互干渉（第4章）

縦せん断荷重を受ける無限弾性体内にある2個の直線き裂の相互干渉を解析的に取扱う。き裂の配置は任意とし，き裂表面に外力は作用しないものとする。解析にあたってはまず一方のき裂に注目し，このき裂縁の境界条件をHilbert問題に変換して解を導く。この解に含まれる未知係数は残りのき裂縁の境界条件を満足するように決定する。その際直線き裂を長円孔の極限の場合と考え，次式のような写像関数を用いる。

$$\left.\begin{aligned} z &= \omega(\varDelta) = \frac{C}{2}\left(R\varDelta + \frac{1}{R\varDelta}\right) \qquad (\varDelta = \rho e^{i\theta}) \\ C &= \sqrt{(a+b)(a-b)}\,, \quad R = \sqrt{(a+b)/(a-b)} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

この長円孔の中心に極を配置し，長円孔縁が自由縁である条件から極の強さを決定すれば解が得られる。この場合，極の強さを表わす未知係数に関する連立一次方程式を解く手続きが必要となるが，逐次近似法を用いることにより容易に解くことができる。このようにして得られた解は，始めのき裂端近傍における応力の特異性を明確にするのに好適である。

き裂相互の干渉を検討するため，2つの直線き裂の長さが等しく，縦せん断荷重がき裂の1つに対して垂直方向から作用する場合，このき裂先端近傍の応力の特異性を表わす応力拡大係数は次式のように表わされる。

$$k_3(A) = \tau_0\sqrt{a}\left[-i + \frac{\mu}{2\tau_0 a}\sum_{n=1}^{\infty} r_2^{-n}\left\{B_n e^{-in(\pi+\phi_2)} - \overline{B}_n e^{-in(\pi-\phi_2)}\right\}\right] \quad (3)$$

$$k_3(B) = \tau_0\sqrt{a}\left[-i - \frac{\mu}{2\tau_0 a}\sum_{n=1}^{\infty} r_1^{-n}\left\{B_n e^{-in(\pi+\phi_1)} - \overline{B}_n e^{-in(\pi-\phi_1)}\right\}\right] \quad (4)$$

ここで B_n は上述の連立一次方程式から求められる未知係数である。式(3)，(4)によりき裂先端の応力拡大係数に対するき裂配置の影響を求めた。

6. 縦せん断荷重を受ける無限弾性体内の直線き裂と円形および長円形介在物との相互干渉（第5章，第6章）

第5章は有限長き裂端の近傍に弾性係数の異なる円形介在物を有する無限体に縦せん断荷重が作用する場合を考察し，第6章は長円形介在物を取扱う，無限体（母材）および介在物はともに均質等方弾性体であり，介在物と母材との接着は完全であるとする。また，き裂縁に外力が作用しないものとする。解析は線形弾性理論に基づき，始めにき裂に着目し，き裂の境界条件をHilbert問題に変換して解を導き，解に含まれる未知係数は介在物と母材との接着縁における境界条件から決定される。この解析法は第4章までの方法と同じ手法である。このようにして求められた解の特徴はき裂先端における応力の特異性を明らかにするのに好適である。

き裂と円形および長円形介在物の弾性相互干渉を検討するため具体的に

(i) 介在物がき裂の延長線上にある場合

(ii) 介在物が任意の位置にある場合

について解析を行い，き裂先端の応力拡大係数に対する介在物の配置，形状およびせん断弾性係数による影響を求めた。

7. 縦せん断荷重を受ける無限弾性体のき裂端応力に対する2個の円形または長円形介在物の影響（第7章，第8章）

第7章および第8章は前2章の拡張として2個の円形または長円形介在物がき裂端近傍の応力場におよぼす介在物の形状，位置および弾性係数の影響を明らかにするために，線形弾性理論に基づき解析を行なったものである。解析方法は前2章と同様に，無限体に対する複素変位関数を誘導するため，き裂縁の条件から導かれるHilbert問題を解く際，介在物中心に極を置くことの配慮をするだけで第4章までの解析法と基本的に同じである。また，母材と介材物の接着縁の条件を満足させるためには，得られた複素変位関数をLaurent級数に展開する手法を用いており，この着想も第4章におけると同様である。

き裂と介在物との弾性相互干渉を検討するため，次のような特別な場合について解析した。

(i) き裂の両側延長線上対称の位置に介在物がある場合

(ii) き裂の片側延長線上に2個の介在物がある場合

(iii) き裂の延長線上に1個，その真上に1個の介在物がある場合

(iv) き裂線に対称に2個の介在物がある場合

以上の4例について，き裂端応力拡大係数に対する2個の介在物の配置，形状および弾性係数の影響を求め，き裂端近傍に介在物が1個ある場合と比較検討した。

8. 結　　論

破壊力学に対する弾性論の寄与の一環として最近注目されている「き裂端応力場の弾性理論に基づく解明」，とくに「き裂端応力場に対する隣接境界の影響の解明」の問題を取上げ，縦せん断荷重が作用する場合に限定して，き裂と自由表面の干渉，2直線き裂間の相互干渉，異質介在物と直線き裂との相互干渉などに関し線形弾性理論に基づく解析を行なった。

半無限体の表面あるいは内部に1個の表面に垂直な直線き裂がある場合（第2章）および異質円形介在物が母材に不完全に接着されているため，接着面に生じる円弧き裂の問題（第3章）に対してはHilbert問題の解が閉じた形で求められた。この結果，第3章において異質材の接着

面に存在するき裂端における応力場の特異性は縦せん断荷重の場合には二次元弾性問題や薄板のたわみ問題における特異性と異なり，応力の符号の急変が生じないことを明らかにした。

第4章〜第8章においては，2直線き裂間の相互干渉やき裂と異質介在物との弾性相互作用について検討を加えた。その結果，等長平行2直線き裂の場合，その相対位置によりき裂端応力拡大係数が1直線き裂だけがある場合に比較して増大することもあるし，逆に遮へい効果を受けて小さくなることもある。また，介在物とき裂との相互作用の問題における結果は介在物による応力集中の局所性，せん断応力の力線分布，介在物による遮へい効果などの組合せによって定性的に理解することができるものである。

審 査 結 果 の 要 旨

材料の持つ欠陥を「き裂」として模型化し，き裂端近傍の応力場の特異性およびそれに対する隣接境界の影響などを連続体力学に基づいて解明することは，破壊力学の基本的問題の一つであり，機械・構造物の強度設計にも極めて重要である。このため，平面変形状態などにおけるき裂問題の解析は多くみられるが，縦せん断荷重状態におけるき裂端応力拡大係数に関する知見は必ずしも多くない。

本論文は，これらを考慮して縦せん断荷重を受ける物体のき裂問題を取上げ，まずき裂端応力場に対する近接介在物などの影響を明確にするための解析方法を提示し，次いでこれを数種の基本的問題に適用して応力拡大係数に関する有用な知見を提供したものであり，９章からなる。

第１章は序論である。第２章および第３章では，き裂問題に対する解析方法を示している。この解法の要点は，縦せん断応力状態を複素変位関数を用いて定式化し，新関数を導入して自由き裂縁の条件を連立Hilbert問題に変換することにある。次に，この解法を半無限体の表面または内部に直線き裂がある問題（第２章）および異質円形介在物が母材に不完全に接着されているため接着縁に生じる円弧き裂の問題（第３章）に適用し，閉じた形の厳密解を導き，き裂端の応力場の特異性を明確にしている。異質材の接着面に存在するき裂端における応力の様相が縦せん断荷重の場合には平面変形状態や薄板の面外曲げ状態の場合と異なることを明示しているのが，新らしい知見である。

母材に対する上記Hilbert問題の解は介在物などの占める領域内に極を持つことが許される。この極の強さを調整して，き裂を持つ母材と介材物などの接着縁の条件を満たすことが可能である。第４章〜第８章では，この着想を用いて前述の解法を拡張し，２直線き裂の相互干渉（第４章），円形介在物の影響（第５章），き裂と長円形介在物の干渉（第６章），２円形介在物の効果（第７章）および２長円形介在物の影響（第８章）の問題に適用して解を求め，２直線き裂やき裂と介在物の弾性相互作用に関する詳細な検討を行っている。複雑な問題に対する本解法の有用性を示すものといえる。また，この種の弾性相互作用はせん断応力の力線分布，応力集中の局所性，き裂，介在物の遮へい効果などの組合せにより理解すべきことを指摘しているが，適切な見解と考える。第９章は結論である。

以上要するに，本論文は縦せん断荷重を受ける弾性体のき裂問題の解明に有効な一解法を確立すると共に，種々の複雑な問題にこれを応用して強度設計上重要な知見を多数提供しており，破壊力学ならびに機械工学に寄与するところ少なくない。

よって，本論文は工学博士の学位論文として合格と認める。