氏　　　　　名	佐藤　謙藏（さとう　けんぞう）
授　与　学　位	工　学　博　士
学位授与年月日	昭和５１年１１月１１日
学位授与の根拠法規	学位規則第５条第２項
最　終　学　歴	昭和４２年３月 山形大学大学院工学研究科機械工学専攻修士課程修了
学位論文題目	**楕円形境界を有する板・膜・環および棒の振動に関する研究**
論文審査委員	東北大学教授　斎藤　秀雄　　東北大学教授　玉手　統 東北大学教授　渥美　光　　東北大学教授　八巻　昇

論　文　内　容　要　旨

第１章　序　　論

一般に，機械系構造物や電気音響機器などを設計しようとする場合，それらの構成要素である機械部材の振動特性の究明は，共振による破壊や振動ならびに騒音防止の観点からみて非常に重要であり，古来きわめて多数の研究が行なわれてきた。通常多く用いられる機械系機器・機械音響振動体は，種々の境界条件を有する棒，板，膜およびそれらの構成系と考えることができる。これらの振動系において，多くの場合平衡点を中心とした微小振動現象がもっとも一般に見られるところであり重要でかつ興味深い。

本研究は，これら機械振動系の一つとして楕円形境界を有する一連の弾性体をとりあげその振動問題を弾性微小振動理論に基づいて考究しようとするものである。楕円形境界を有する弾性振動体の実際例としては，圧力容器のふたなどに用いられる楕円板，楕円筒殻の補強用および電気

一音響変換機器に用いられる楕円環，太鼓・ティンパニのような楽器として利用される楕円形膜，機械部品として利用される楕円形断面を有する弾性棒などをあげることができる。

さて，同心円形境界を有する弾性体の問題を考える場合，円筒座標（r，θ，z）を導入して解析すれば便利な場合が多い。一般的に言うと，もし境界がある曲線からなるならば，各境界の曲線上で，ある変数が一定となる曲線座標を用いることができれば好都合である。いま，境界が共焦点楕円で与えられる棒，板および膜などの振動を論じようとする場合，直交直線座標（x，y，z）と

$$x=\bar{c}\cosh\xi\cos\eta,\quad y=\bar{c}\sinh\xi\sin\eta,\quad z=z$$

なる関係を有する楕円筒座標（ξ，η，z）を導入すると，ξ＝一定が楕円筒面を，η＝一定が双曲面筒を表わすから取扱いに好都合である。弾性体の運動方程式を楕円筒座標で表示すると，良く知られたマシュー形微分方程式および変形マシュー形微分方程式に帰着する場合が多く，それらの解はマシュー関数および変形マシュー関数によって与えられる。いわゆるマシュー形微分方程式

$$\frac{d^2w}{dz^2}+(a-2q\cos 2z)w=0$$

は，1868年に楕円形境界を有する連続体の二次元問題の中から楕円形膜の振動問題を取扱ったMathieu[1]によって最初に議論された。その後，マシュー形微分方程式の解すなわちマシュー関数の数学的な研究や物理・工学の諸問題への応用が多くの研究者によって行なわれてきている。マシュー関数に関する数学的な理論は一応確立されており，代表的な書物としてMcLachlanの著書[2]とMeixnerおよびSchafkeの共著書[3]をあげることができる。しかしながら，マシュー関数の工学への応用を考えるとき，関数の取扱いの煩雑さのために，一様で連続な楕円形境界を有する連続体のように，もっとも基本的な弾性系の振動問題ですら，いまだに未解明の部分が多くこの方面の研究者の議論の対象となっているのが現状である。

こうした状況にかんがみ，本研究は，楕円板・膜・環および楕円形断面を有する棒の弾性振動特性を解明することを目的とする。解析にあたって，マシュー関数の直交性に着目して理論展開を進めることに留意した。

第2章　楕円板の自由たわみ振動

本章では，せん断力および回転慣性の影響を無視した通常の古典薄板微小たわみ理論に基づいて，楕円板の自由たわみ振動問題を取扱った。振動は，系の対称性に基づいて4種類の基準振動に分類されるが，実用上もっとも重要な最低次振動モードを含む楕円の両軸に関して対称な基準振動の場合について議論した。

最初に，単純支持および自由縁を有する楕円板の振動を扱い，数値計算によって楕円の縦横比と最初の5つの振動モードの振動数との関係を明らかにした。さらに，工学上の諸問題においては，境界条件を弾性支持として考えなければならないものが非常に多いので，弾性支持縁を有する楕円板の自由たわみ振動をも考えた。弾性支持の条件としては，支持部において板の垂直変位がなく，かつ楕円の接線方向にとった軸まわりの板縁の回転角に比例する復元モーメントが作用するものとした。数値計算により，種々のポアッソン比にたいして，楕円の縦横比，支持部の回転バネ定数および系の最低次振動数の関係を明らかにした。

次に，共焦点楕円で境界づけられた楕円形輪状板の自由たわみ振動を考えた。このような楕円板においては，内外縁の境界条件の種々の組合せに対応する振動数方程式を導くことができる。本研究においては，内外縁が自由である場合と，内縁が固定で外縁が自由である場合の2例について考察した。外縁の縦横比が6/5の場合に，内外縁の短軸の長さ比と系の最初の6つの振動モードの振動数との関係を数値計算によって明らかにした。

最後に，共焦点段付楕円板の自由たわみ振動を取扱った。一般に，共焦点段付楕円板は任意個の共焦点楕円部分から構成されるものであるが，本研究においては2つの共焦点楕円部分からなる段付板を考えた。数値例を示すために，外側楕円形輪状板の外縁の境界条件は自由であるとしまた外縁の縦横比は6/5とした。この場合に，共通楕円の短軸の長さ比，内外楕円板 の厚さ比および系の最初の2つの振動モードの振動数の関係を求めてグラフに示した。

本解析の妥当性を確認するために，自由縁を有する楕円板，楕円形輪状板および共焦点段付楕円板について実験を行なった。試験片を軟鋼板で製作し，固有振動数は共振法により決定した。試験片を加振するために，チタンサンバリウム磁器を試験片に貼付し，チタンサンバリウム磁気の圧電効果を利用した。理論結果と実験結果は良好なる一致を示し本解析の妥当性が裏づけられた。

第3章　楕円形膜の振動

本章では，密度の異なる任意個の共焦点楕円部分からなる構成楕円形膜の振動問題を取扱った。ここで考える膜は，十分に曲りやすく，また各共焦点楕円部分においては材質も厚さも一様な無限に薄い板である。膜は，すべての方向に一様に大きな張力で引張られていて，振動中の微小たわみによって張力は変化しないものとする。

最初に，構成共焦点楕円形膜および輪状膜の自由振動問題を取扱った。解析においては変数分離法を適用した。本問題は，数学的には，任意の初期条件ならびに連続および境界条件を満足するような運動方程式の解を求めることである。数値例を示すために，2つの共焦点楕円部分からなる構成膜をとりあげて，密度比の変化にたいする系の固有振動数の変化を明らかにした。

次に，構成共焦点楕円形膜の強制振動問題を取扱った。解析においては，ラプラス変換法を用いた。この構成膜に作用する強制外力は，膜の表面上に一様に加わる時間のみに依存する力とする。調和強制外力が作用する均質楕円形膜の特別の場合にたいする解の最終形式をラプラス変換の逆変換定理を用いて与えた。

本章での解析は，楕円座標系の双曲線方向に連続的に密度が変化する楕円形膜の振動にたいする一つの近似解法を与えるものとも考えることができる。

第 4 章　楕円環の自由たわみ振動

円環の振動は，すでに多くの研究者によって取扱われてきたが，楕円環の振動に関する研究はあまり行なわれていない。本章では楕円環の自由たわみ振動を取扱うが，第 2 章の楕円形輪状板のたわみ振動において，内外境界楕円が近接している場合を考えれば，楕円環の面外振動についてはかなりの考察を得ることができる。したがって，本章では面外振動については対象とせず，面内振動のみを取扱っている。

解析方法は，Love[4]によって展開された曲線棒の振動理論に基づいた。なお，本研究においては，せん断力および回転慣性の影響を無視して理論展開している。本問題の場合，運動方程式の解析解を直接求めることは困難であるから，面内たわみ振動変位をマシュー関数によって展開し，その係数を運動方程式から決定する方法によって振動数方程式を導いた。このような方法で得られる振動数方程式より，楕円の種々の縦横比にたいして，最初の 8 つの振動モードの振動数の数値計算を行ない表にまとめた。なお，縦横比が 2 の場合に，振動モード形状の数値計算も行ない図に示した。

本解法の妥当性を確認するために，軟鋼板で製作した試験片を用いて第 2 章に述べたような共振法によって実験を行なったところ，理論結果と実験結果は良好なる一致を示した。

第 5 章　楕円形断面を有する棒の弾性波動

本章では，境界にどんな拘束も有しないような楕円形断面を有する無限長弾性棒の波動問題を三次元弾性理論に基づいて正確な理論展開を行なった。従来も三次元弾性理論に基づいて正確な理論展開を行なおうとした報告はあるが，運動方程式の解であるマシュー関数の取扱いに適性さを欠き，したがって正確なる数値解が求められていなかった。

本研究では，すでに述べた楕円板，楕円形膜および楕円環の振動に関する研究のときと同様に，マシュー関数の直交性に着目して理論展開を進めることによって振動数方程式を導いた。このようにして求まる振動数方程式より，楕円の縦横比，波長および位相速度の関係を数値計算により明らかにした。縦波動，ねじり波動，楕円の短軸方向へ振動する場合のたわみ波動および楕円

の長軸方向へ振動する場合のたわみ波動の計算結果をそれぞれ表と図に示した。すでに摂動法や選点法などの近似解法によって求められている結果との比較検討も行なった。

第6章　結　論

結論として本論文を要約し，第２章から第５章までの総括を行なった。

終りに，本研究の遂行にあたり終始懇切丁寧な御指導御鞭撻を賜りました東北大学工学部教授斎藤秀雄先生に心から感謝申し上げます。

また，本研究にあたり有益なる御批判と御助言を賜わりました東北大学工学部教授玉手統先生，渥美光先生，東北大学高速力学研究所教授八巻昇先生並びに東北大学工学部機械工学科助教授佐藤喜一先生はじめ研究室各位にたいして深く感謝の意を表わします。

さらに，本研究中多くの貴重なる御意見と御激励をいただきました山形大学工学部教授高橋伸先生と平野芳太郎先生にたいして厚く感謝申し上げます。

なお，本研究の一部は昭和４８，４９，５０および５１年度文部省科学研究費（奨励研究Ａ）の補助を受けたものでありここに感謝の意を表わします。

文　献

(1) Mathieu, E., Memoire sur le mouvement vibratoire dune membrane de forme elliptique. Jour. de Math. Pures et Appliquees. (Jour. de Liouville) 13 (1868), 137.

(2) McLachlan, N. W., "Theory and Application of Mathieu Functions" Dover Publications (1964).

(3) Meixner, J. und Schafke, F. W., "Mathieusche Funktionen und Spharoidfunktionen" Springer-Verlag (1954).

(4) Love, A. E. H., "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity" Cambridge U. P., Cambridge (1934), 444-454.

審 査 結 果 の 要 旨

機械構造物や各種機器にはだ円形境界を有する各種弾性体，たとえばだ円板，だ円膜，だ円環，及びだ円棒などがしばしば用いられる。これら構造部材の振動挙動の解明は振動工学における基本的な課題の一つであり，多くの研究が行われてきている。しかしだ円形境界を有する各種弾性体の振動は，長方形や円形境界を有する弾性体の場合とは異なり，その取り扱いが非常に繁雑となるため，一般には近似解法によって固有振動数，振動モードを求めることが多く，厳密な解析的取り扱いによって振動特性を明らかにすることは従来あまり行われてはいない。本論文はだ円形境界を有する代表的弾性体の振動問題を，マシュー関数を用いて各種境界条件の下に厳密に解くとともに実験をも行い，理論解との比較検討を行ったもので，全篇6章よりなる。

第1章は序論であり，従来の研究の概括および本研究の意義と目的を述べている。

第2章では，だ円板の自由たわみ振動を究明している。最初だ円筒座標を導入してだ円板の自由たわみ振動をマシュー関数および変形マシュー関数で表わし，これらを自由縁，単純支持縁，弾性支持縁を有するだ円板，だ円形輪状板，共焦点段付だ円板に適用し，縦横比，離心率に対する固有振動数の変化，振動モードを明らかにしている。さらに自由縁だ円板，輪状板，段付だ円板の振動実験を行い，実験結果と理論解とはよく一致することを確かめ，本解析の妥当性を確認している。

第3章では，密度の異なる任意個の共焦点だ円部分からなる構成共焦点だ円膜ならびにだ円形輪状膜の自由振動を取り扱い，密度比の変化に対する系の固有振動数の変化を明らかにしている。さらに構成共焦点だ円形膜の表面上に外力が作用する場合の強制振動をラプラス変換法を用いて解析している。

第4章では，だ円環の面内たわみ振動について詳述している。まず振動変位をマシュー関数によって展開し，その係数を運動方程式から決定する方法によって振動数方程式を導いている。これより環の種々の縦横比に対して8次振動までの固有振動数，振動モードを計算して図表にまとめ，さらに振動実験の結果と比較し，本解析法の正しいことを実証している。

第5章ではだ円形断面を有する無限長弾性棒の波動問題を3次元弾性理論に基づいて厳密に解析している。本章においてはマシュー関数の直交性に着目して理論展開を進め，縦波動，ねじり波動，だ円形断面の短軸並びに長軸方向へのたわみ波動の4種類について振動数方程式を求め，だ円形断面の縦横比をパラメータとして波長と位相速度の関係を数値計算により明らかにしている。摂動法や選点法など近似方法による数値結果しか見られぬ現在においてマシュー関数を用い

て正確な数値結果を与えたことは新しい知見である。

第 6 章は得られた結果の総括である。

以上要するに本論文は，だ円形境界を有する板，膜，環および棒の振動を最も基本的な境界条件のもとに厳密に解明し，だ円形連続体の振動理論の進展と充実に有益な成果を挙げており，振動工学ならびに機械工学に寄与するところ少なくない。

よって，本論文は工学博士の学位論文として合格と認める。