

	やまき しゅんすけ	
氏 名	八 卷 俊 輔	
授 与 学 位	博士 (工学)	
学位授与年月日	平成20年9月11日	
学位授与の根拠法規	学位規則第4条第1項	
研究科, 専攻の名称	東北大学大学院工学研究科 (博士課程) 電子工学専攻	
学位論文題目	Synthesis of High Accuracy Digital Filter Structures (高精度デジタルフィルタ構造の合成に関する研究)	
指 導 教 員	東北大学教授 川又 政征	
論文審査委員	主査 東北大学教授 川又 政征 東北大学教授 安達 文幸 東北大学教授 吉澤 誠 東北大学准教授 阿部 正英	

## 論文内容要旨

本論文の目的は、高精度デジタルフィルタ構造の合成である。デジタルフィルタの有限語長実現問題として、係数量子化誤差と丸め誤差、リミットサイクルが挙げられる。本研究では、その中でも係数量子化誤差およびリミットサイクルに着目し、これらの問題を起こしにくいフィルタ構造の合成を目標としてきた。

デジタルフィルタを計算機上で実現する際には、フィルタ係数を有限のビット長で表現しなければならない。そのため、デジタルフィルタにおいて、理想的なフィルタ係数と実際のフィルタ係数との間には誤差が生じる。この誤差がフィルタ特性に与える影響が係数量子化誤差である(図1)。係数量子化は、デジタルフィルタの特性を劣化させるだけではなく、安定なフィルタを不安定化してしまうこともある。そのため、係数量子化誤差はできる限り低減しなければならない。

リミットサイクルとは、再帰形デジタルフィルタにおいて、零入力時または一定入力時に発生する発振現象のことである。このリミットサイクルは、有限語長で実現されたデジタルフィルタの乗算時の丸めや加算時のオーバーフローなどといった非線形性によって生じる現象である。リミットサイクルが起これば、安定なデジタルフィルタが不安定であるかのように振る舞ってしまう。そのため、一般にはリミットサイクルは発生しないことが望ましい。

係数量子化誤差の度合いおよびリミットサイクルの有無は、いずれもデジタルフィルタの伝達関数だけではなく、デジタルフィルタの構造によって大きく左右される。デジタルフィルタの構造を適切に決定することにより、係数量子化誤差が小さく、リミットサイクルを発生しない高精度なデジタルフィルタを構築することができる。本論文は、係数量子化誤差が小さく、リミットサイクルを発生しないデジタルフィルタ構造の合成について論じたものであり、全編8章よりなる。

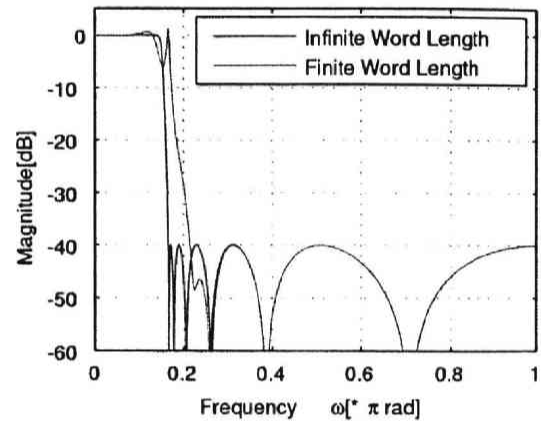


図1 デジタルフィルタの係数量子化誤差

第1章は緒言であり、本論文の背景および目的について述べる。すなわち、高精度デジタルフィルタ構造の合成および  $L_2$  感度最小化問題について論じる。まず、高精度なデジタルフィルタを実現するためには状態空間デジタルフィルタが有用であることを論じる。次に、係数感度の小さいデジタルフィルタとして  $L_2$  感度最小実現をとりあげ、過去に提案されてきた  $L_2$  感度最小実現の各合成法の関係をまとめる。

第2章では、本論文において必要とされる数学的概念を紹介する。まず、状態空間デジタルフィルタの基礎的概念として、 $L_2$  感度および座標変換について解説する。次に、 $L_2$  感度最小化問題を紹介し、スケーリングを考慮しない  $L_2$  感度最小化問題およびスケーリングを考慮した  $L_2$  感度最小化問題の定式化を行う。さらに、リミットサイクルおよび周波数変換について詳しく論じる。

第3章では、 $L_2$  感度最小実現の合成のための前準備として必要となる理論を2つ提案する。まず、 $L_2$  感度を定式化するための一般グラミアンの新しい表現法を提案する。一般グラミアンは、係数行列の無限和を用いて定義される行列である。この一般グラミアンに関して、これまでの定義式をより簡単に書きかえられることを示し、無限和を用いない新しい定義式を導出する。次に、2次デジタルフィルタの平衡実現の閉じた形の表現法を提案する。平衡実現は、可制御性グラミアンと可観測性グラミアンが等しくなるフィルタ構造であり、 $L_2$  感度最小実現を合成するための初期実現として用いられる。2次デジタルフィルタはその極配置により3つの場合（極が複素共役の場合、極が異なる実数の場合、極が等しい実数の場合）に分類することができる。この3つの場合のうち、極が複素共役な場合については、平衡実現の閉じた形の表現法がすでに知られている。本論文では、極が実数である場合について平衡実現の閉じた形の表現法を導出する。さらに、新たに導出された平衡実現の係数行列が符号対称性を満たすことを示し、極配置によって符号対称性のパターンが決まることを明らかにする。

第4章では、 $L_2$  スケーリングを考慮しない  $L_2$  感度最小実現の解析的な合成法を提案する。 $L_2$  感度最小実現を合成する問題は非線形方程式を解く問題に帰着するため、解析的に解くことは従来不可能であった。そのため、過去に提案されてきた方法は全て、繰り返し計算を用いて近似的に最適解を求める方法であった。本章では、実用上重要な2次のデジタルフィルタを対象とし、 $L_2$  感度最小実現の解析的な合成法を新たに導出する。まず、 $L_2$  感度最小実現を合成するための初期実現として、平衡実現を合成する。平衡実現は、第3章で導出したものをそのまま用いることができる。次に、第3章で導出された一般グラミアンの新しい表現および平衡実現の閉じた形の表現を用いて、 $L_2$  感度が簡単な多項式で与えられることを示す。さらに、 $L_2$  感度の最小値を与える座標変換行列が、定数係数4次方程式を解くことで解析的に得られることを示す。4次方程式は解析的に解けることが数学的に知られているため、 $L_2$  感度最小化問題は解析的に解けることになる。よって、2次のデジタルフィルタについて、 $L_2$  感度最小実現の解析的な合成法を導くことができる。従来法[1,2]では繰り返し計算を用いて近似的に解を導出していたのに対し、提案法では繰り返し計算をいっさい用いずに解析的に解を導出する(図2)。そのため、提案法は従来法に比べて非常に効率のよい合成法であるといえる。

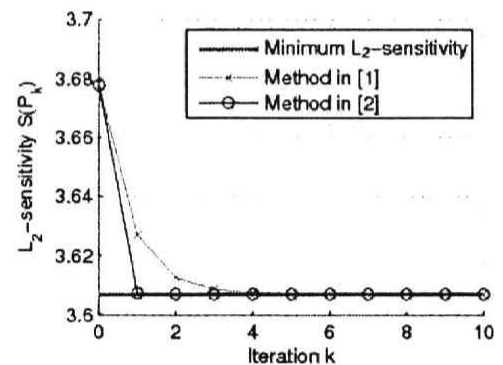


図2 スケーリングを考慮しない  $L_2$  感度最小化

第5章では、 $L_2$  スケーリングを考慮した  $L_2$  感度最小実現の解析的な合成法を提案する。本章で解く問題は、

第4章で解いた問題に  $L_2$  スケーリング制約という制約条件を設けた問題である。 $L_2$  スケーリング制約とは、状態空間デジタルフィルタの内部状態のオーバーフローを抑制するための制約条件である。この  $L_2$  スケーリング制約を満たすフィルタ構造

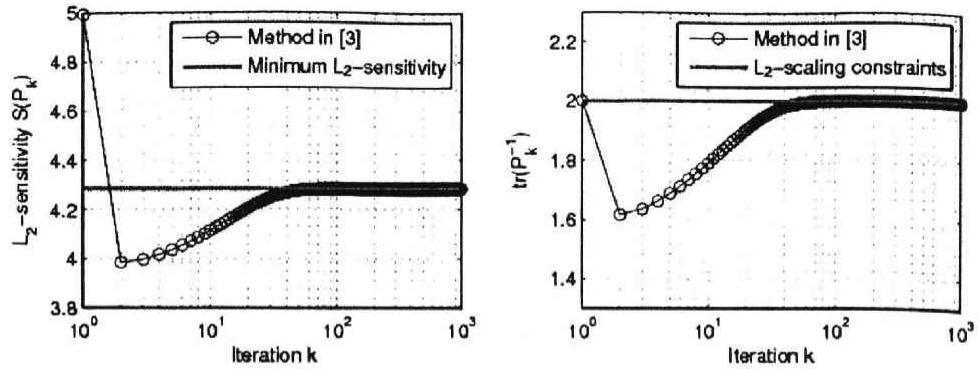
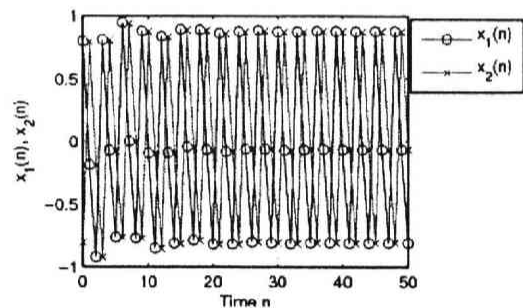


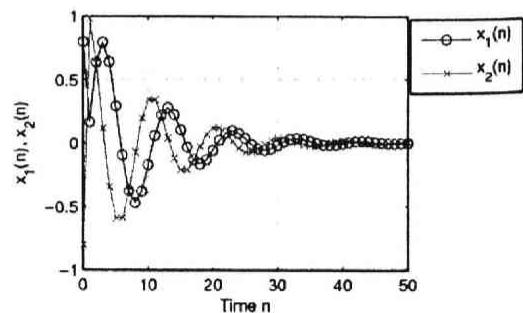
図3 スケーリングを考慮した  $L_2$  感度最小化

造の中で  $L_2$  感度が最小となるようなフィルタ構造がスケーリングを考慮した  $L_2$  感度最小実現である。本解法ではまず、 $L_2$  感度最小実現を合成するための初期実現として、入力正規形を合成する。入力正規形とは、可制御性グラミアンが単位行列となるフィルタ構造であり、平衡実現から解析的に合成することができる。次に、制約条件付きの  $L_2$  感度最小化問題を制約条件なしの  $L_2$  感度最小化問題におきかえるための変数変換を新たに提案する。この変数変換を用いることにより、解くべき問題が非常に簡単に書き換えられる。そして、第4章と同様に、一般グラミアンの新しい表現および平衡実現の閉じた形の表現を用いて、 $L_2$  感度が簡単な多項式で与えられることを示す。さらに、 $L_2$  感度の最小値を与える座標変換行列が、定数係数2次方程式を解くことで解析的に得られることを示す。よって、2次のデジタルフィルタについて、 $L_2$  感度最小実現の解析的な合成法を導くことができる。スケーリングを考慮した  $L_2$  感度最小化問題においてもまた、従来法[3]では繰り返し計算を用いて近似的に解を導出していたのに対し、提案法では繰り返し計算をいっさい用いずに解析的に解を導出する(図3)。そのため、提案法は従来法に比べて非常に効率のよい合成法であるといえる。

第6章では、 $L_2$  感度最小実現がリミットサイクルを発生しない構造にできることを理論的に明らかにする。リミットサイクルは、デジタルフィルタの有限語長実現問題のひとつであり、零入力時または一定入力時にデジタルフィルタの内部状態が発振してしまう現象である。これまでに、平衡実現や丸め誤差最小実現などがリミットサイクルを発生しないフィルタ構造として知られてきたが、本章では、スケーリングを考慮しない  $L_2$  感度最小実現がリミットサイクルを発生しない構造にできることを示す。第4章で合成したスケーリングを考慮しない  $L_2$  感度最小実現は、座標変換行列に任意の直交行列が含まれるため、一意に定まらない。つまり、スケーリングを考慮しない  $L_2$  感度最小実現は、直交行列の任意性の範囲で無限に存在する。その中で、リミットサイクルを発生しないフィルタ構造が必ず存在することを明らかにする。具体的には、任意である直交行列を単位行列と特定することにより、スケーリングを考慮しない  $L_2$  感度最小実現はリミットサイクルを発生しない構造にできる。直交行列を単位行列と特定して得られた  $L_2$  感度最小実現において、可制御性グラ



(a) 直接形



(b)  $L_2$  感度最小実現

図4 零入力応答に現れるリミットサイクル

ミアンおよび可観測性グラミアンが、リミットサイクルを発生しないための十分条件を満たしているため、この構造がリミットサイクルを発生しないことが理論的に証明できる。あるデジタルフィルタを直接形 II および  $L_2$  感度最小実現で実装し、その零入力応答を観測したとき、直接形 II はリミットサイクルを発生するのに対し、 $L_2$  感度最小実現はリミットサイクルを発生しないことが実験的に確かめられた(図 4)。

第 7 章では、2 次モードが全て等しい任意の次数のデジタルフィルタに関して、 $L_2$  感度最小実現が解析的に合成できることを理論的に証明する。2 次モードとは、伝達関数によって決まるシステム固有のパラメータであり、 $N$  次のフィルタは  $N$  個の 2 次モードを有する。本章では、ある  $N$  次デジタルフィルタについて、 $N$  個の 2 次モードが全て等しい場合、 $L_2$  スケーリングを考慮しない  $L_2$  感度最小実現は平衡実現に等しく、 $L_2$  スケーリングを考慮した  $L_2$  感度最小実現は入力正規形に等しいことを理論的に証明する。2 次モードが全て等しいデジタルフィルタの例として、1 次のデジタルフィルタやオールパスフィルタ、周波数変換によって得られたバンドパスフィルタなどが挙げられる。これらのフィルタに関して計算例を示し、理論の正当性を確認する。

第 8 章は結言である。

以上より、本論文は、係数量子化誤差およびリミットサイクルの観点から、高精度デジタルフィルタ構造の合成に関して数多くの新しく重要な知見を得たものであり、電子工学および信号処理工学において寄与するところが少なくない。しかし、本論文の範囲で解決できなかった部分が今後の課題として残されている。まず、第 4 章および第 5 章で新たに提案された  $L_2$  感度最小実現の解析的な合成法は、2 次のデジタルフィルタのみを対象としており、3 次以上の高次のデジタルフィルタには適用できない。本解法を高次のデジタルフィルタにも適用できるよう拡張することができれば、より汎用性が高く、有用な解法にできると期待される。次に、第 6 章でスケーリングを考慮しない  $L_2$  感度最小実現がリミットサイクルを発生しないフィルタ構造にできることを証明したが、スケーリングを考慮した  $L_2$  感度最小実現のリミットサイクルに関する解析は行われていない。スケーリングを考慮した  $L_2$  感度最小実現に関しては、リミットサイクルを発生しないことが実験的に確かめられているが、その理論的な証明は全く行われていない。この事実に関して理論的な証明を与えることが、今後検討すべき課題のひとつである。

## 参考文献

- [1] W.-Y. Yan and J. B. Moore, "On  $L_2$ -sensitivity minimization of linear state-space systems," *IEEE Trans. Circuits Syst. I Fundamental theory and applications*, vol. 39, no. 8, pp. 641–648, Aug. 1992.
- [2] T. Hinamoto, S. Yokoyama, T. Inoue, W. Zeng, and W.-S. Lu, "Analysis and minimization of  $L_2$ -sensitivity for linear systems and two-dimensional state-space filters using general controllability and observability gramians," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. CAS-49, no. 9, pp. 1279–1289, Sept. 2002.
- [3] T. Hinamoto, K. Iwata, and W.-S. Lu, " $L_2$ -sensitivity minimization of one- and two-dimensional state-space digital filters subject to  $L_2$ -scaling constraints," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 54, no. 5, pp. 1804–1812, May 2006.

# 論文審査結果の要旨

デジタルフィルタの有限語長実現問題として、係数量子化誤差と丸め誤差、リミットサイクルが挙げられる。デジタルフィルタの有限語長実現においては、係数量子化誤差が小さく、丸め誤差が小さく、リミットサイクルを発生しない高精度なデジタルフィルタ構造を合成することが望まれる。本論文は、係数量子化誤差が最小であり、リミットサイクルを発生しないデジタルフィルタ構造の合成について論じたものであり、全編8章よりなる。

第1章は緒言であり、高精度デジタルフィルタの必要性および  $L_2$  感度（ベクトルの大きさの基づく係数感度）最小化問題について論じている。

第2章では、本論文において必要とされる状態空間デジタルフィルタの基礎的性質、 $L_2$  感度最小化問題、リミットサイクル、周波数変換などについて詳しく論じている。

第3章では、 $L_2$  感度最小実現の合成のために必要となる数学的事項を整理している。まず、 $L_2$  感度を定式化するための一般グラミアンの新しい表現法を提案している。次に、2次デジタルフィルタの平衡実現の閉じた形の表現法を提案している。平衡実現は、 $L_2$  感度最小実現を合成するための初期実現として用いられる。

第4章では、 $L_2$  スケーリングを考慮しない  $L_2$  感度最小実現の解析的な合成法を提案している。 $L_2$  感度最小実現を解析的に合成することは従来不可能であった。しかし、2次のデジタルフィルタを対象とした場合には、 $L_2$  感度を閉じた形で表現することができ、その結果、 $L_2$  感度最小実現の解析的な合成法を導くことができた。これは理論的に新しい知見である。

第5章では、 $L_2$  スケーリングを考慮した  $L_2$  感度最小実現の解析的な合成法を提案している。本解法では、制約条件付きの最適化問題を制約条件なしの最適化問題におきかえるための変数変換を新たに提案している。そして、2次のデジタルフィルタを対象としたときに、第4章と同様に、 $L_2$  感度を閉じた形で表現することができ、その結果、 $L_2$  感度最小実現の解析的な合成法を導くことができた。これは理論的にも実用的にも優れた成果である。

第6章は、 $L_2$  感度最小実現がリミットサイクルを発生しない構造に変換できることを理論的に明らかにしている。第4章で合成したスケーリングを考慮しない  $L_2$  感度最小実現は、その座標変換行列に含まれる直交行列を単位行列と特定することにより、リミットサイクルを発生しない構造にできることが示された。

第7章は、2次モードが全て等しい任意の次数のデジタルフィルタに関して、 $L_2$  感度最小実現の解析的な合成法を提案している。2次モードが全て等しいデジタルフィルタにおいて、 $L_2$  スケーリングを考慮しない  $L_2$  感度最小実現は平衡実現に等しく、 $L_2$  スケーリングを考慮した  $L_2$  感度最小実現は入力正規形に等しいことが示された。

第8章は結言である。

以上要するに本論文は、係数量子化誤差およびリミットサイクルの観点から、高精度デジタルフィルタ構造の合成に関して数多くの重要な知見を得たものであり、電子工学および信号処理工学において寄与するところが少なくない。

よって、本論文は博士(工学)の学位論文として合格と認める。